

۱. جمعیت دو گونه رقیب با دستگاه معادله زیر مدل شده است.

$$\dot{x} = x(6 - 4x - 2y)$$

$$\dot{y} = y(6 - x - 5y)$$

الف) نقطه تعادل درونی  $(x, y > 0)$  این سیستم را به دست آورید. (۳ نمره)

ب) دستگاه معادلات این سیستم را حول نقطه تعادل درونی خطی کنید. (۵ نمره)

ج) نوع نقطه تعادل درونی را با استدلال بیان کنید. (۶ نمره)

د) شکلی نسبتاً دقیق از جواب‌های این سیستم در نزدیکی نقطه تعادل درونی رسم کنید. (۶ نمره)

۲. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 y'' + x \left[ \frac{1}{1-x} + 1 \right] y' + \left[ \frac{1}{1-x} - 1 \right] y = 0. \quad (*)$$

الف) نشان دهید  $x = 0$  نقطه تکیین منظم برای این معادله است. (۴ نمره)

ب) معادله اوایلر متناظر با آن را بنویسید. (۶ نمره)

ج) جواب عمومی معادله اوایلر را به دست آورید و بررسی کنید که جواب در چه شرایطی نزدیک مبدأ کران‌دار است. (۸ نمره)

د) به کمک روش سری‌ها یک جواب برای معادله (\*) در همسایگی صفر به دست آورید. (۱۲ نمره)

۳. به کمک تبدیل لاپلاس یک جواب صوری برای معادله با شرایط اولیه زیر پیدا کنید. (۱۵ نمره)

$$y'' + 2y' + y = 1 + \delta(t - 2)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

۴. با فرض  $f(t) = t$ ، تابع  $\phi(t)$  را برای  $t \geq 0$  پیدا کنید که در رابطه زیر صدق کند. (۱۵ نمره)

$$\phi + \phi * f = 1$$

$$\text{که } (\phi * f)(t) = \int_0^t \phi(t-s)f(s)ds$$

۵. برای معادله زیر یک تابع لیاپانوف به صورت  $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$  حول نقطه بحرانی  $(0, 0)$  پیدا کنید. (۲۰ نمره)

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -y - \sin x$$

(راهنمایی: می‌توانید از نامساوی  $|\sin x - x| \leq |x|^3$  که برای همه  $x$  ها درست است استفاده کنید.)