به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری سوم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۹۰/۲/۲۷

۱-وضعیت پایداری مبداء را در هریک از دستگاههای زیر به دست آورید:

الف- $f(x,y)=(-x^3+y, x^6-y^3)$

ب-$f(x,y)=(-x+y^6, y^3+x^6)$

ج- $f(t,x,y)=(-x^3+\alpha(t)y, -\alpha(t)x-y^3)$ که $\alpha(t)$ تابع پیوسته و کران‌دار است.

د- $f(x,y)=(y, -x-(1+b\cos t)y)$ برای $\left|b\right|<1$.

ه-$f(x,y)=(y, -\sin x-(1+b\cos t)y)$ برای $\left|b\right|<1$.

و-$f(x,y)=(x(a-\alpha y), y(b-\beta x))$همچنین وضعیت نقطه بحرانی دیگر این میدان را تعیین کنید. (همه ضرایب مثبت هستند.)

۲-الف- اگر ماتریس A پایدار مجانبی باشد، نشان دهید تابع $V(X)=X^TPX$ یک تابع لیاپانوف برای دستگاه $\dot{X}=AX$است که $P=\int_0^\infty e^{tA^T}e^{tA}dt$. (ابتدا باید نشان دهید انتگرال همگراست.)

ب- اگر ماتریس A هذلولوی و ناپایدار باشد، تابعی به صورت $V(X)=X^TPX$ وجود دارد که $\dot{V}\geq c\left|X\right|^2$ و تابع V در هر همسایگی مبداء مقدار مثبت اتخاذ می‌کند.

۳-آیا در دستگاه خطی $\dot{X}=A(t)X$ پایداری مجانبی با پایداری نمایی هم‌ارز است؟ در صورتی که دستگاه پایدار نمایی باشد، نشان دهید $V(t,X)=X^TP(t)X$ یک تابع لیاپانوف است که $P(t)=\int_t^\infty \Phi(\tau,t)^T\Phi(\tau,t)d\tau$ و $\Phi(t,t_0)$ ماتریس اساسی است.

۴-اگر $x=0$ نقطه بحرانی دستگاه $\dot{x}=f(t,x)$ باشد و $V(t,x)$ برای ضرایب مثبت α, c_1, c_2, c_3در شرایط زیر صدق کند، نشان دهید مبداء پایدار نمایی است.

$$c_1\left|X\right|^\alpha\leq V(t,X)\leq c_2\left|X\right|^\alpha \qquad \dot{V}(t,X)\leq -c_3\left|X\right|^\alpha$$

۵-اگر $x=0$ نقطه بحرانی دستگاه $\dot{x}=f(t,x)$ باشد و $V(t,x)$ معین مثبت و $\dot{V}(t,x)$ منفی معین باشد، مبداء پایدار مجانبی است در صورتی که $f(t,x)$ در یک همسایگی مبداء برای هر $t\geq 0$ کران‌دار باشد یا اینکه $f(t,x)$ نسبت به t متناوب باشد.

۶-توابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ و $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ به طور پیوسته مشتق‌پذیرند و $f(0)=0, h(0)>0$. نشان دهید مبداء در $\dot{x}=f(x)$ پایدار نمایی است اگر و تنها اگر در $\dot{x}=h(x)f(x)$ پایدار نمایی باشد. آیا این مطلب برای پایدار مجانبی نیز صحیح است؟

۷-فرض کنید $V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی معین مثبت باشد که مشتق فازی آن نسبت به میدان $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ در رابطه $\dot{V}(t,x)\leq g(t,V(t,x))$ صدق می‌کند. $g:\mathbb{R}\times\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که $g(t,0)=0$. همچنین $x=0$ نقطه بحرانی $\dot{x}=f(t,x)$ است.

الف- اگر مبداء در $\dot{y}=g(t,y)$ پایدار باشد، $x=0$ در $\dot{x}=f(t,x)$ پایدار است.

ب- اگر $V(t,x)\leq W(x)$ و مبداء در $\dot{y}=g(t,y)$ پایدار نمایی باشد، $x=0$ در $\dot{x}=f(t,x)$ پایدار نمایی است.

ج- در رابطه با پایداری مجانبی چه می‌توان گفت؟

د- اگر g روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ تعریف شود و $g(t,y)=g(t,-y)$، $V(t,x)\leq W(x)$، $\dot{V}(t,x)\geq g(t,V(t,x))$ و مبداء در $\dot{y}=g(t,y)$ ناپایدار باشد، $x=0$ در $\dot{x}=f(t,x)$ ناپایدار است.

۸-میدان $f(x)=\nabla g(x)$ برای تابع هموار $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ میدان گرادیان می‌نامیم. نشان دهید در هر میدان گرادیان هیچ مداری، متناوب نیست. همچنین اگر همه نقاط بحرانی میدان منزوی باشند، هر مجموعه ωحدی ناتهی یک نقطه بحرانی است.

آخرین مهلت: ۹۰/۳/۷