به نام او

پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی ۸۸/۴/۱۴

۱- اگر جواب دستگاه $\dot{X}=AX$ با شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ را با $X(t,X_0)$ نشان دهیم و E^s زیرفضای پایدار آن باشد، نشان دهید

$$E^s=\left\{ X_0\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \mu>0,\ \lim_{t\to\infty} e^{\mu(t-t_0)}X(t,X_0)=0 \right\}$$

۲- الف) نشان دهید اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A منفی باشد و $\lim_{t\to\infty}\|B(t)\|=0$ آنگاه دستگاه $\dot{X}=(A+B(t))X$ پایدار مجانبی است.

ب) همچنین نشان دهید که اگر قسمت حقیقی یکی از مقادیر ویژه A مثبت باشد دستگاه فوق ناپایدار است.

۳- اگر $f(0)=0$ و S همسایگی پایدار $\dot{x}=f(x)$ در همسانگی مبدأ باشد، نشان دهید مقدار $\delta>0$ وجود دارد که اگر برای هر $t>0$ ، $|X(t)|<\delta$ آنگاه $X(t)\in S$ برای هر $t>0$.

۴- نشان دهید بازه ماکسیمال جواب معادله زیر $(-\infty,\infty)$ است.

$$\begin{cases} \dot{x}=-(1+x^2)x+e^t \\ x(0)=a \end{cases}$$

۵- ثابت کنید دستگاه زیر دقیقاً یک جواب تناوبی دارد.

$$\begin{cases} \dot{x}=x-y-x^3 \\ \dot{y}=x+y-y^3 \end{cases}$$

۶- با محاسبه تقریبی همسایه مرکزی و شار روی آن در دستگاه زیر نشان دهید مبدأ ناپایدار است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_1y-x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2=x_2y-x_2x_1^2 \\ \dot{y}=-y+x_1^2+x_2^2 \end{cases}$$

۷- نشان دهید معادله $x''+a(x^2-1)x'+x=\varepsilon\sin t$ برای مقادیر $|a|$ به اندازه کافی کوچک دارای جوابهای 2π-متناوب است. یک تقریب از مرتبه $O(\varepsilon^2)$ از این جوابها به دست آورید.

موفق باشید