به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری سوم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۸۸/۲/۲

۱-هر یک از میدانهای زیر را در نقطه بحرانی مبداء خطی کنید، دستگاه خطی متناظر آن و زیرفضاهای پایدار، ناپایدار و مرکزی را بنویسید. همچنین خمینه‌های پایدار، ناپایدار و مرکزی را با تقریب خوبی محاسبه کنید و شکل تقریبی جوابها را در همسایگی مبداء ترسیم نمایید. (شار روی خمینه مرکزی باید محاسبه شود.)

الف- $f(x,y) = (-x, 2y + x^2)$

ب- $f(x,y,z) = (-x, -y + x^2, z + x^2)$

ج- $f(x,y,z) = (-x, -y + x^2, z + y^2)$

د- $f(x,y) = (-x^3, -y + x^2)$

ه- $f(x,y,z) = (-y + xz, x + yz, -z - x^2 - y^2 + z^2)$

و- $f(x,y,z) = (-x^3 - y^3, xz - y^3, -z + x^2)$

ز- $f(x,y,z) = (x(y+z), -y^2 + x\cos z, 2x + z - \sin y)$

ح- $f(x,y) = (xy + ax^3 + by^2x, -y + cx^2 + dx^2y)$ برای مقادیر مختلف d, c, b, a.

۲-نگاشت مزدوج توپولوژیک بین دستگاههای زیر و قسمت خطی آنها را محاسبه کنید.

الف- $f(x,y,z) = (-x, -y + z^2, z)$

ب- $f(x,y,z) = (-x, y, z + x^2 + xy)$

ج- $f(x,y,z) = (-x, -y + x^2, z + x^2)$

۳-نشان دهید نگاشت مزدوج توپولوژیکی بین دستگاه زیر و قسمت خطی آن وجود ندارد که برای همه نقاط صفحه تعریف شده باشد.

$$\dot{x} = 2x$$
$$\dot{y} = 4y + x^2$$

۴-در هر قسمت با دلیل کافی پاسخ دهید که آیا دو میدان داده شده در همسایگی مبداء مزدوج توپولوژیکی هستند یا خیر؟

الف- $g(x) = bx,\ f(x) = ax$

ب- $g(x,y) = (-x + x^2 + 2y + y^3, -y + xy^2),\ f(x,y) = (-x + xy^2, -y - x^2)$

ج- $g(x,y,z) = (y + xz, -z + xy, x + yz),\ f(x,y,z) = (z + x^2, -x + y^2, y + z^2)$

۵-با بازنویسی قضیه خمینه پایدار برای دستگاه $\dot{x} = Ax + f(t,x)$ نشان دهید که اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(t,x)}{|x|} = 0$ به طور یکنواخت نسبت به t و قسمت حقیقی k مقدار ویژه ماتریس A منفی و $n-k$ تا مثبت باشد، زیرخمینه $k+1$ بعدی $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$، در همسایگی مبداء وجود دارد که اگر $(t_0, x_0) \in S$، آنگاه $(t, x(t)) \in S$ برای $t \geq t_0$ که $x(t)$ جواب این دستگاه برای شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ است، به علاوه $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. همچنین مقدار $\delta > 0$ وجود دارد که اگر $|x_0| < \delta$ و $(t_0, x_0) \notin S$ آنگاه جواب $x(t)$ گوی به شعاع δ حول مبداء را در یک زمان $t > t_0$ ترک کند.

۶-الف- اگر $\varphi(t,x)$ شار دستگاه $\dot{x} = f(x)$ باشد که $f(0) = 0$ و $A = Df(0)$ هذلولوی است، نشان دهید برای هر $x \in W^s(0)$ داریم $\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\varphi(t,x)|}{t} \leq -\alpha$ که

$$-\alpha = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \text{که قسمت حقیقی آن منفی است } A \text{ مقدار ویژه } \lambda\} < 0$$

ب- اگر دقیقاً m مقدار ویژه A وجود داشته باشد که $\mathrm{Re}\,\lambda < -\beta < 0$ و بقیه مقادیر ویژه در رابطه $\mathrm{Re}\,\lambda > -\beta$ صدق کنند، نشان دهید خمینه m بعدی S_m وجود دارد که به طور مثبت ناوردا است و برای هر $x \in S_m$ داشته باشیم $\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\varphi(t,x)|}{t} \leq -\beta$ و اگر $x \in W^s - S_m$، آنگاه

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\varphi(t,x)|}{t} > -\beta.$$

ج- در دستگاه زیر $g(0) = 0, Dg(0) = 0$ و $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} x + g(x)$$

نشان دهید جواب یکتای ϕ وجود دارد که در حد انتقال و ضرب اسکالر تنها جوابی است که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\phi(t)|}{t} = -\lambda_1$$