

به نام او

امتحان میان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی - ارزی هشت ۸۶

۱- اگر میدان  $f(x)$  روی  $\mathbb{R}^n$  کراندار باشد، نشان دهید بازه ماکسیمال هر جواب دستگاه  $\dot{x} = f(x)$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

۲-  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  مجموعه باز مثل نقطه  $x_0$  است و  $f \in C^1(\Omega)$ . فرض کنید  $x(t, y)$  جواب دستگاه زیر باشد:

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(t_0) = y$$

به علاوه جواب  $x(t, x_0)$  در بازه  $[a, b]$  تعریف شده است. ثابت کنید مقادیر ثابت  $K, \delta > 0$  وجود دارند که

برای هر  $|y - x_0| < \delta$  جواب  $x(t, y)$  در بازه  $[a, b]$  تعریف شده است و

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| \leq |y - x_0| e^{K|t - t_0|}$$

۳- ثابت کنید نقطه  $x=0$  در دستگاه  $\dot{x} = (A + B(t))x + g(t, x)$  پایدار مجانبی است هرگاه ماتریس ثابت  $A$  پایدار مجانبی

باشد و  $B(t)$  ماتریس میوه است و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(t, x)}{|x|} = 0$  به طور یکسوز نسبت به  $t$ .

۴- قضیه هارتمن - گرومن برای دستگاه زیر صحتی را بیان می کند. نشان دهید همواره موجود در قضیه را

محاسبه کنید. حین های پایدار و ناپایدار را حول مبدأ به دست آورید.

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = -y + x^2 z$$

$$\dot{z} = z$$

۵- الف) اگر  $\Phi(t)$  ماتریس اساسی دستگاه  $\dot{x} = A(t)x$  باشد، ثابت کنید  $\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \text{tr} A(t) \cdot \det \Phi(t)$ .

ب) اگر  $u(t, y)$  جواب  $\dot{x} = f(x)$  باشد و  $x(t_0) = y$  باشد، ثابت کنید

$$\det D_y u(t, y) = \exp \int_{t_0}^t \text{div} f(u(s, y)) ds$$

موفق باشید