بنام خدا

پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی - خرداد ۸۶

۱- f یک میدان C^1 در ناحیه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ است و دستگاه $\dot{x}=f(x)$ دارای مدار تناوبی $\gamma(t)$ با دوره تناوب T است. اگر P نگاشت پوانکاره این مدار در نقطه $\gamma(0)$ باشد، ثابت کنید

$$P'(0) = \exp\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t))\, dt$$

۲- اگر $\varphi(t)$ جواب کراندار دستگاه $\dot{x}=\nabla f$ باشد که $f:\mathbb{R}^n \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$. ثابت کنید نقطه x_0 وجود دارد که $\nabla f(x_0)=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = x_0$.

۳- $f(x)$ یک میدان C^1 روی Ω و $\tau:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع هموار مثبت است. نشان دهید تصویر مدارهای دستگاههای $\dot{x}=f(x)$ و $\dot{x}=\tau(x)f(x)$ یکسان است.

۴- نشان دهید دستگاه زیر جواب تناوبی یکتا دارد.

$$\dot{x}= 2x - x^3 + xy^2$$
$$\dot{y}= 2y - y^3 - x^2y$$

۵- فرض کنید $\omega>0$ ، $a\in C[0,\infty)$ و $\int_0^\infty |a(t)|dt<\infty$. نشان دهید که معادله $y''+(\omega^2+a(t))y=0$ دارای جواب $\phi(t)$ است، به طوری که

$$\lim_{t\to\infty} |\phi(t) - \sin\omega t|^2 + |\phi'(t) - \omega\cos\omega t|^2 = 0$$

(راهنمایی: نشان دهید جواب دستگاه $\dot{Y}=(A+B(t))Y$ به صورت $y(t)=x(t)-\int_t^\infty e^{(t-s)A}B(s)y(s)ds$ نمایش داده می‌شود که $\dot{x}=Ax$.)

۶- میدان $f(x)$ در $\mathbb{R}^n$ در شرط $|f(x)|\le a|x|+b$ صدق می‌کند. ثابت کنید بازه ماکسیمال هر جواب دستگاه $\dot{x}=f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است.

موفق باشید