

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تاریخ: ۱۳۸۸/۳/۱۰
جمع نمره: ۱۵

آنالیز عددی ۱
آزمون چهارم

۱. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y'(x) = e^{xy} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

الف - با استفاده از روش تیلور مرتبه سه و $h = 0.1$ ، مقدار تخمینی $y(0.2)$ را بدست آورید.
ب - تخمینی از خطا را بدست آورید.

۲. با استفاده از تعریف نشان دهید روش رانگ-کوتای مرتبه دو برای حل مسأله زیر همگراست.

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1$$

راهنمایی: روش رانگ-کوتای مرتبه ۲ برای معادله $y' = f(x, y)$ محاسبه دنباله زیر است:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases}$$

روش فوق را همگرا می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in [a, b]$ با قرار دادن $h = \frac{x-a}{n}$ و محاسبه دنباله بالا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x)$$

که $y(x)$ جواب مسأله‌ی مقدار اولیه $y' = f(x, y), y(a) = y_0, a \leq x \leq b$ است. در این مسأله

جواب معادله $y(x) = e^{\lambda x}$ است.

۳. به یکی از دو روش تیراندازی یا تفاضل متناهی مسأله زیر را حل کنید.

$$y'' = -3y' + 2y + (2x + 3)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1, \quad h = 0.2$$