

۱- A و B دو ماتریس $n \times n$ هستند که $AB + BA = 0$

الف- ثابت کنید اگر n فرد باشد، لااقل یکی از ماتریسهای A و B وارون پذیر نیست.

ب- با یک مثال نشان دهید برای مقادیر زوج n ، حکم الف صحیح نیست. (۱۵ نمره)

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & m^2 - m & m \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-1 & 1 & m \end{bmatrix} \quad -۲$$

الف- بعد فضای پوچ ماتریس A را برای مقادیر مختلف m به دست آورید.

ب- برای مقادیر مختلف m ، بهترین تقریب جواب دستگاه $Ax = b$ را از لحاظ کمترین مجموع مربعات به دست آورید. (۲۰ نمره)

۳- W یک زیر فضای \mathbb{R}^n است و $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y = 0, y \in W\}$ برای هر بردار $y \in W$

الف- ثابت کنید $\dim W + \dim W^\perp = n$. (راهنمایی: $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ را پایه‌ای برای W و $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ پایه‌ای

برای W^\perp در نظر بگیرید و نشان دهید $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ پایه‌ای برای \mathbb{R}^n است.)

ب- ثابت کنید $(W^\perp)^\perp = W$.

ج- با استفاده از قسمت الف ثابت کنید برای هر ماتریس دلخواه A ، $\text{rank } A = \dim(\text{Row } A)$. (۲۰ نمره)

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad -۴$$

الف- یک پایه متعامد برای زیر فضای W^\perp پیدا کنید.

ب- تصویر عمودی بردار $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی زیر فضای W^\perp را پیدا کنید. فاصله این بردار تا زیر فضای W چقدر است؟

ج- یک ماتریس نمایش برای عملگر تصویر روی زیر فضای W^\perp بنویسید. (۲۰ نمره)

۵- A یک ماتریس $m \times n$ است. همراه با اثبات دقیق مطالب نشان دهید می‌توان پایه متعامد یکه $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$

برای $\text{Col } A$ و پایه متعامد یکه $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ برای $\text{Row } A$ انتخاب کرد، به طوری که Av_i مضربی از بردار u_i باشد.

(۲۰ نمره)

۶- به یکی از دو سؤال زیر به دلخواه پاسخ دهید:

الف- اگر A ماتریس مثبت معین باشد، آنگاه ماتریس مثبت معین B وجود دارد که $A = B^2$.

ب- اگر A و B دو ماتریس مثبت معین باشند، آنگاه ماتریس $A+B$ نیز مثبت معین است. (۱۵ نمره)