ریاضی عمومی ۲

جلسه اول　　۹۶/۱۱/۱۵

مباحث ریاضی ۱ : تعریف اعداد حقیقی ، $\mathbb{R}$

توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، پیوستگی ، مشتق ، انتگرال

تقریب

ریاضی ۲ : آشنایی با توابع چند متغیره و خواص

ساده‌ترین مثال از فضاهای چند متغیره : صفحه به عنوان مجموعه زوج‌های مرتب

$$\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}\}$$

در حالت کلی فضای $\mathbb{R}^n$ به عنوان n تایی‌های مستقل از هم در نظر می‌گیریم

$$\{(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{R}\}$$

مبانی جلسه در فضای $\mathbb{R}^n$.

① اعضای این فضا از n تایی‌های مرتب تشکیل شده است که به آنها **بردار** می‌گوییم .

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

② جمع بردارها :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

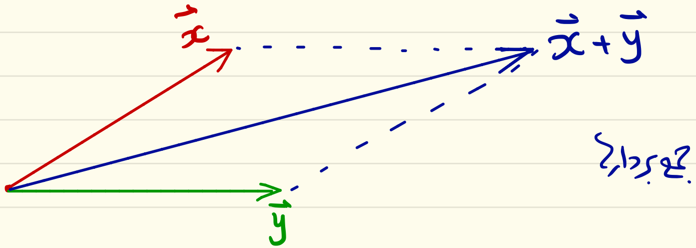
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

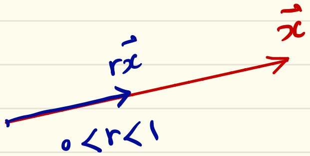
③ ضرب اسکالر : عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید ، منظور از ضرب $r\vec{x}$

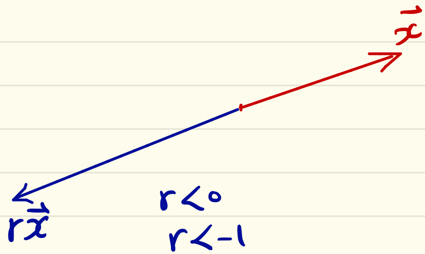
بردار زیر است :

$$r\vec{x} = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$$

دید هندسی :







خواص جمع برداری و ضرب اسکالر:

۱ $1\vec{x} = \vec{x}$

۲ $r(s\vec{x}) = (rs)\vec{x}$ به ازای هر $r,s \in \mathbb{R}$

۳ $(r+s)\vec{x} = r\vec{x} + s\vec{x}$ به ازای هر $r,s \in \mathbb{R}$

۴ $r(\vec{x}+\vec{y}) = r\vec{x} + r\vec{y}$

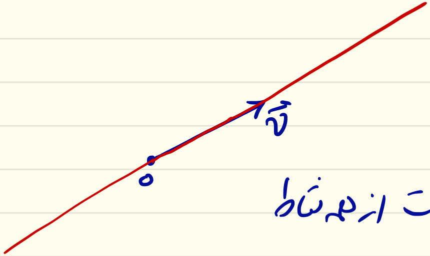
$\vdots$

تعریف: (طول بردار) تعریف استاندارد

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

(نرم اقلیدسی)

تعریفِ خط راست در $\mathbb{R}^n$:



خطی که از مبدأ می‌گذرد همه مضارب یک بردار
بدست می‌آید. در واقع تشکیل شده است از همه نقاط

خط راست گذرا از مبدأ در راستای $\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)$ $= \{ r\vec{v} : r\in\mathbb{R} \} = \{ (rv_1, rv_2, \dots, rv_n) : r\in\mathbb{R} \}$

$$:= \langle \vec{v} \rangle$$

به همین ترتیب می‌توان در حالت کلی خط راست را که از نقطه p و در راستای $\vec{v}$ می‌گذرد به این صورت تعریف کرد:

$$p+\{ r\vec{v} : r\in\mathbb{R} \} = \{ (p_1+rv_1, \dots, p_n+rv_n) : r\in\mathbb{R} \}$$

← مجموعِ یکِ متغیره

$$:= p+\langle \vec{v} \rangle$$

تذکر: نمایشِ یکِ خط به کمک نقطه p و راستای $\vec{v}$ یکتا نیست. بردار $\vec{v}$ را با هر مضرب از آن می‌توان جایگزین کرد.
و به جای نقطه p هم هر نقطه دلخواهی از خط را می‌توان گذاشت.

اگر $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نقطه دلخواه از خط فوق باشد

$$\begin{cases} x_1 = P_1 + r v_1 \\ \vdots \\ x_n = P_n + r v_n \end{cases} \Longrightarrow \frac{x_1 - P_1}{v_1} = \frac{x_2 - P_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - P_n}{v_n}$$

معادله یک خط در فضای $\mathbb{R}^n$

قرارداد: اگر $v_i = 0$ باشد، قرار می‌دهیم $x_i = P_i$.

چگونه تشخیص دهیم که دو خط موازی هستند؟

① به کمک معادله جبری فوق اگر در صورت مضرب x_i ها یک باشد، آنگاه بردار

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

که از مقادیر مخرج کسرها به دست می‌آید راستای خط را نشان می‌دهد. اگر برای دو خط متفاوت این دو راستا مضرب

همدیگر باشند، این دو خط موازی هستند.

مثال:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1-1}{2} = \dfrac{2x_2-3}{4} = \dfrac{x_3}{1} \\[2ex] \dfrac{x_1-2}{2} = \dfrac{x_2-4}{2} = \dfrac{2x_3-5}{2} \end{cases}$$

این دو خط موازی هستند.

۲) روش دیگر برای تشخیص توازی دو خط، انتقال خطوط به مبدأ است.

$$l_1 = p + \langle \vec{v} \rangle = \{ (p_1 + t v_1, \cdots, p_n + t v_n) : t \in \mathbb{R} \}$$

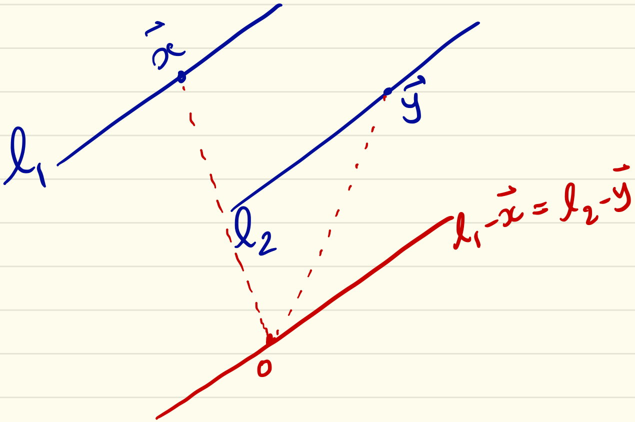
$$l_2 = q + \langle \vec{w} \rangle = \{ (q_1 + r w_1, \cdots, q_n + r w_n) : r \in \mathbb{R} \}$$

نقطه $\vec{x} \in l_1$ و $\vec{y} \in l_2$ انتخاب می‌کنیم $l_1 - \vec{x}$ خطی است که از مبدأ می‌گذرد

همینطور $l_2 - \vec{y}$.

اگر این دو مجموعه با هم مساوی باشند آنگاه دو خط را موازی گوییم. یعنی

$$\ell_1 - \vec{x} = \ell_2 - \vec{y}$$



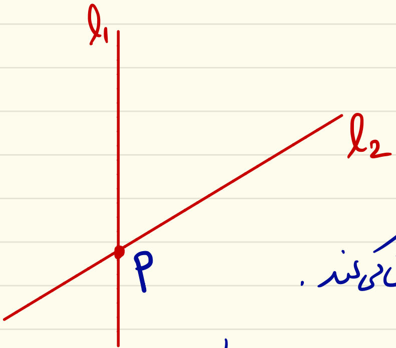
دو خط متقاطع :

معادله خط l_1 $\quad \dfrac{x_1-a_1}{v_1} = \cdots = \dfrac{x_n-a_n}{v_n}$

معادله خط l_2 $\quad \dfrac{x_1-b_1}{w_1} = \cdots = \dfrac{x_n-b_n}{w_n}$

یکِ نقطه دلخواه از خط l_1 بصورت زیر است :

$$x_1=a_1+tv_1 \;,\; \ldots \;,\; x_n=a_n+tv_n$$



اینِ مختصات را در معادله خط l_2 وارد می‌دهیم. اگر مقدار t از معادله خط l_2 پیدا شود، معنای آن اینِ است که نقطه P وجود دارد که در هر دو معادله l_1 و l_2 صدق می‌کند.

جمع بندی: اگر تعداد مقادیر t که از روابط بالا بدست می‌آیند، بیش از یک مقدار باشد، آنگاه دو خط بر هم منطبق هستند. اگر مقداری برای t پیدا نشد معنای آن اینِ است که دو خط اشتراکی ندارند.

مثال: خط l_1، خط گذرا از $A=(1,2,3)$ و در راستای $\vec{v}=(1,0,1)$.

خط l_2، خط گذرا از $B=(0,1,-1)$ و در راستای $\vec{w}=(1,-1,0)$

بررسی کنید که l_1 و l_2 آیا موازی، متقاطع یا متنافر هستند؟

پاسخ: انتقال l_1 و l_2 به مبدأ متناظر خطوط $\langle \vec{v} \rangle$ و $\langle \vec{w} \rangle$ هستند. چون این دو بر هم منطبق نیستند پس l_1 و l_2 موازی نیستند.

مختصات یک نقطه دلخواه از l_1:

$$A+t\vec{v}=(1+t,2,3+t)$$

معادله خط l_2:

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2-1}{-1}=\frac{x_3+1}{0}$$

بررسی می‌کنیم به ازای چه مقادیری از t نقطه $A+t\vec{v}$ در معادله l_2 صدق می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l} A + t\vec{V} = (1+t,\ 2,\ 3+t) \\[1em] \dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2-1}{-1} = \dfrac{x_3+1}{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} (t+3)+1 = 0 & \Rightarrow t = -4 \\[1em] \dfrac{t+1}{1} = \dfrac{2-1}{-1} & \Rightarrow t = -2 \end{array}\right. \quad \times$$

← معادله بالا برای هیچ مقداری از t برقرار نیست. یعنی l_1 و l_2 نقطه مشترکی ندارند.

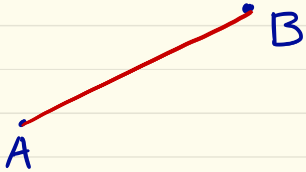
چون موازی نیستند پس خط‌ها متنافر هستند.

ریاضی عمومی ۲

جلسه دوم ۹۶/۱۱/۱۷

بردار $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

طول بردار (نرم بردار) $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

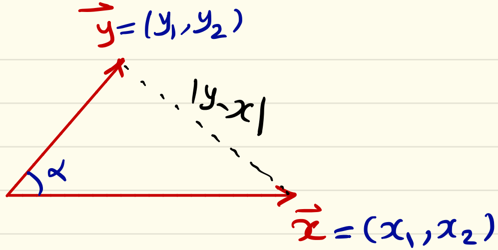


فاصله دو نقطه A تا B = طول برداری که از A شروع می‌شود و به B می‌رسد $= |\vec{AB}|$

$A = (a_1, \dots, a_n) \quad , B = (b_1, \dots, b_n)$

$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$

تعریف زاویه :



$$|\vec{y}-\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\alpha \qquad (*)$$

$$\vec{y}-\vec{x}=(y_1-x_1\,,\,y_2-x_2) \Rightarrow |\vec{y}-\vec{x}|^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$$

$$(*) \Rightarrow (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2=(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)-2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\alpha$$

$$-2x_1y_1-2x_2y_2=-2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}}$$

با مقایسه مشابه در $\mathbb{R}^n$ می‌توان دید که

$$\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$$

تعریف: ضرب داخلی دو بردار $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

جمع‌بندی: α زاویه بین دو بردار $\vec{x}$, $\vec{y}$ است که

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$$

خواص ضرب داخلی:

۱) جابجایی
$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$$

۲) پخشی
$$\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$$

۳) بازای هر عدد حقیقی r
$$(r\vec{x})\cdot\vec{y}=r(\vec{x}\cdot\vec{y})$$

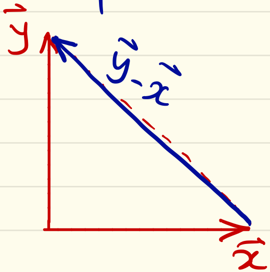
۴)
$$\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$$

۵)
$$-|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\leq\vec{x}\cdot\vec{y}\leq|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$$

(نامساوی کوشی - شوارتس)

نتیجه: دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ برهم عمودند اگر و تنها اگر $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

قضیه فیثاغورس: $\vec{x}\perp\vec{y} \iff |\vec{x}\pm\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$



اثبات:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 \overset{(4)}{=} (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$

$$\overset{(2)}{=} (\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{x} + (\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y}$$

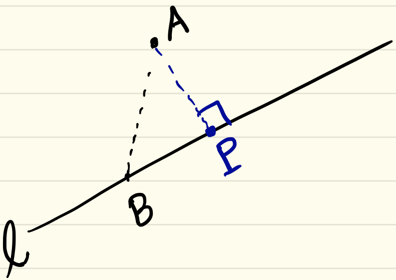
$$\overset{(1)}{=} \vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{y}\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$

$$\overset{(2)}{=} \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$\overset{(1),(4)}{=} |\vec{x}|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2 \Leftarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=0 \Leftarrow \vec{x}\perp\vec{y}$$ اگر

$$\vec{x}\perp\vec{y} \Leftarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=0 \Leftarrow |\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$$ برعکس اگر



فاصله نقطه A تا خط l = کمترین فاصله‌ای که تا نقاط خط l دارد

$$= \min_{B\in l} |\vec{AB}|$$

$$\vec{B}+t\vec{V}$$

اگر B یک نقطه دلخواه از خط l باشد، معادله خط l به صورت

$\vec{B}+t\vec{V}$ است که $\vec{V}$ راستای خط l است.

اگر P پای عمود نقطه A باشد آنگاه $\vec{P} = \vec{B} + t_0 \vec{v}$ که باید t_0 را پیدا کنیم.

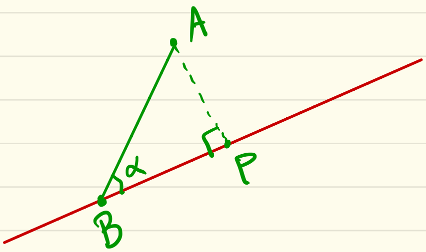
از طرفی باید بردار $\vec{AP}$ بر راستای l عمود باشد یعنی

$$\vec{v} \cdot \vec{AP} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot (\vec{B} + t_0 \vec{v} - \vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow t_0 (\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{(\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

فاصله A از خط l $= |\vec{AP}| = |\vec{B} - \vec{A} + t_0 \vec{v}|$



$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{v}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow |\vec{BP}| = |\vec{AB}|\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{B} + \frac{(\vec{AB}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{|\vec{v}|^2}}$$

مثال: خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ و نقطه $A=(3,1,0)$

فاصله A تا خط بالا را بدست آورید.

نقطه دلخواه از l $\quad B=(1,0,-2)$

راستای خط l $\quad \vec{v} = (2,3,1)$

$$(\vec{B}+t_0\vec{v}-\vec{A})\cdot\vec{v} = 0$$

$$t_0 |v|^2 = (\vec{A}-\vec{B})\cdot\vec{v} \Rightarrow 14t_0 = (2,1,2)\cdot(2,3,1)$$
$$= 9$$

پای عمود $\quad P = \vec{B} + \frac{9}{14}\vec{v} = \dots$

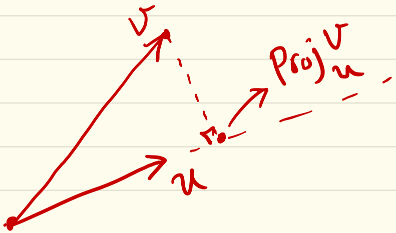
راه حل دوم :

$$|\overrightarrow{AB}| = 3$$

$$\vec{P} = \vec{B} + 3\cos\alpha\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{B} + 3\,\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$= \vec{B} + \frac{3\times 9}{3\sqrt{14}}\,\frac{\vec{v}}{\sqrt{14}}$$

عملگر تصویر: بردار $\vec{u}$ را ثابت در $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. تصویر بردار v در راستای $\vec{u}$ که با نماد $\text{Proj}_u v$ نشان می‌دهیم در واقع برداری است در راستای $\vec{u}$ که تفاضلش با $\vec{v}$ بر $\vec{u}$ عمود است. در واقع



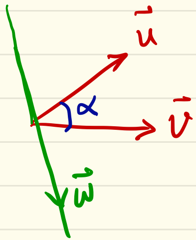
$$\vec{v} - \text{Proj}_u v \perp \vec{u}$$

برای یک تعداد حقیقی λ داریم $\quad \mathrm{proj}_{u} v = \lambda \vec{u}$

که $\quad (\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \Rightarrow \mathrm{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} u$$

ضرب خارجی دو بردار در $\mathbb{R}^3$



$$\vec{V} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{و} \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

بردار $\vec{w}$ را ضرب خارجی $\vec{u}$ و $\vec{v}$ می‌گیریم و می‌نویسیم $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{V}$

که

1) $\quad \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

2) $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\alpha$

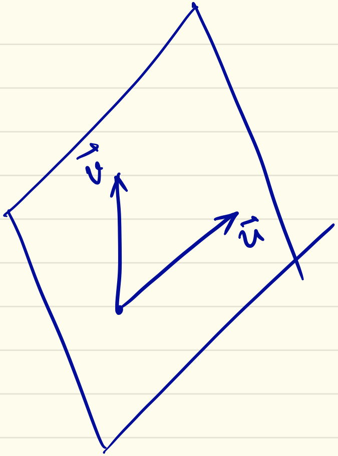
$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, v_1u_3 - u_1v_3 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1)$$

تمرین: نشان دهید $\vec{w}$ با مختصات فوق در روابط (1) و (2) صدق می‌کند.

تمرین: اگر $\vec{u} \parallel \vec{v}$ یعنی $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ، نشان دهید $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

تعریف صفحه در $\mathbb{R}^n$.

دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غیر هم راستا در نظر بگیرید.



$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \{ t\vec{u} + s\vec{v} \ : \ t,s \in \mathbb{R} \}$$

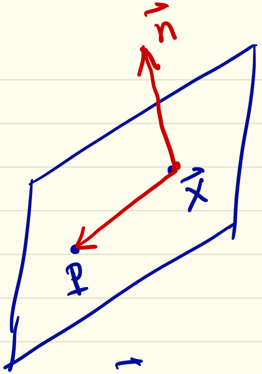
یک صفحه است که از مبدأ می‌گذرد.

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی باشند، موجود هندسی بالا یک خط است.

صفحه‌ای که از نقطه P می‌گذرد به صورت

$$P + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \{ P + t\vec{u} + s\vec{v} \ : \ t,s \in \mathbb{R} \}$$

تعریف می‌شود.



معادله جبری صفحه در $\mathbb{R}^3$: صفحه تشکیل شده از همه نقاط $\vec{X}\in\mathbb{R}^3$

که $(\vec{X}-\vec{P})$ بر یک بردار ثابت مثل $\vec{n}$ عمود است.

$$\vec{n}=(a,b,c)$$

$$\vec{X}=(x,y,z)$$

$$\vec{P}=(p,q,r)$$

$$\Rightarrow 0=\vec{n}\cdot(\vec{X}-\vec{P})=a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)$$

$$\Rightarrow \quad ax+by+cz=d=ap+bq+cr$$

معادله جبری صفحه در $\mathbb{R}^3$ در حالت کلی به صورت زیر است:

$$ax+by+cz=d$$

مثال: معادله جبری صفحه‌ای را به دست آورید که از نقطه $(1,0,1)$ می‌گذرد و تشکیل شده از دو راستای $(0,1,-1)$ و $(2,1,0)$.

$$\vec{n} = (2,1,0) \times (0,1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1, 2, 2)$$

$$\underbrace{(x-1, y, z-1)}_{\vec{x}-\vec{p}} \cdot \underbrace{(-1, 2, 2)}_{\vec{n}} = 0$$

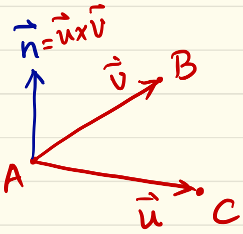
$$\boxed{-x + 2y + 2z = 1}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه سوم ۹۶/۱۱/۲۴

مثال:

$A=(1,0,1)$ ، $B=(0,1,-1)$ ، $C=(1,1,1)$



معادله صفحه ای که از این سه نقطه می گذرد را پیدا کنید.

$$\vec{u}=C-A=(0,1,0)$$

$$\vec{v}=B-A=(-1,1,-2)$$

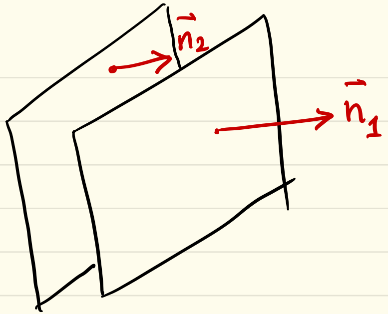
$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-2,0,1)$ بر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود است.

صفحه گذرا از این سه نقطه : $A+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\{A+t\vec{u}+s\vec{v} : t,s\in\mathbb{R}\}$

معادله جبری این صفحه

$$\vec{n}\cdot(X-A)=0$$

$$0=(-2,0,1)\cdot(x-1,y,z-1)=-2x+z+1$$

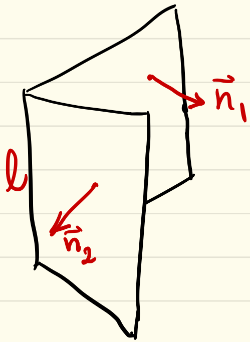


دو صفحه موازی: اگر بردارهای عمود بر دو صفحه موازی باشند، آنگاه دو صفحه موازی هستند. در این حالت یا دو صفحه کاملاً بر هم منطبق هستند یا هیچ اشتراکی ندارند.

تذکر: اگر معادله جبری صفحه $ax+by+cz=d$ باشد، بردار عمود بر صفحه بردار

$$\vec{n}=(a,b,c)$$

است.



دو صفحه متقاطع: اشتراک آنها یک خط است. اگر n_1 و n_2 دو بردار عمود بر این دو صفحه باشند، n_1 و n_2 بر راستای خط l عمودند.

در نتیجه راستای l موازی $n_1 \times n_2$ است.

اگر p یک نقطه مشترک از دو صفحه باشد، آنگاه معادله خط به صورت $P + \langle \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \rangle$ است.

مثال: $x+y+2z=0$, $x-y+z=1$. دو صفحه متقاطع هستند.

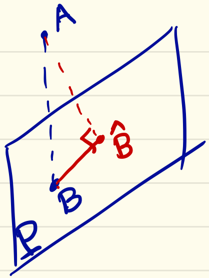
$$n_1=(1,1,2) \quad , \quad n_2=(1,-1,1) \Rightarrow n_1 \times n_2=(3,1,-2)$$

یک نقطه از اشتراک $\Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x-y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=1/2 \,,\, y=-1/2$

خط اشتراک $\quad (1/2,-1/2,0)+\langle(3,1,-2)\rangle$

معادله خط : $\dfrac{x-1/2}{3}=\dfrac{y+1/2}{1}=\dfrac{z}{-2}$

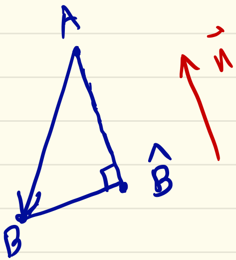
فاصله:



$$\text{فاصله نقطه } A \text{ تا صفحه } P = \min_{B \in P} |AB|$$

می‌دانیم مقدار می‌نیمم عبارت بالا زمانی حاصل می‌شود که AB عمود بر صفحه P باشد.

سؤال: معادله جبری صفحه داده شده است و یک نقطه A خارج از صفحه. فاصله A تا صفحه چقدر است؟

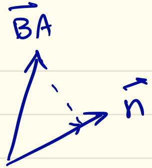


راه حل: یک نقطه دلخواه از صفحه مثل B را انتخاب می‌کنیم و بردار AB را تصویر می‌کنیم بر راستای $\vec{n}$. طول تصویر برابر $|A\hat{B}|$ است.

مثال: فاصله $(2,1,-3)$ تا صفحه $2x-2y-z=9$ را به دست آورید.

$B=(5,0,1)$, $\vec{n}=(2,-2,-1)$

$\overrightarrow{BA}=(-3,1,-4)$

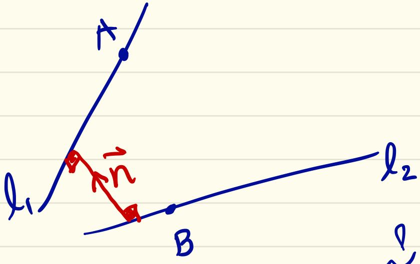


$$(\overrightarrow{BA}-\lambda\vec{n})\cdot\vec{n}=0$$

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2} \qquad \mathrm{Proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{BA}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}$$

فاصله نقطه A تا صفحه $=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{4}{3}$

فاصله دو خط متنافر:

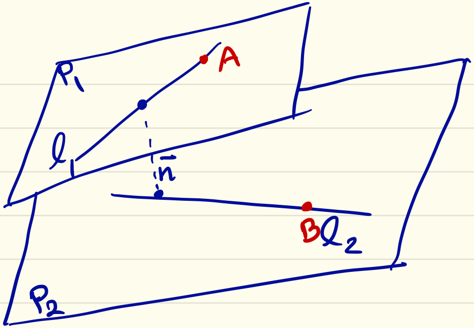


$$\min_{\substack{A\in l_1\\ B\in l_2}} |AB|$$

این مینیمم وقتی به دست می‌آید که AB بر l_1 و l_2 عمود باشد.

$$A=P_1+tU_1 \quad , \quad B=P_2+sU_2$$

$$AB\cdot U_1=0=AB\cdot U_2$$



راستای عمود بر دو خط l_1 و l_2 $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

اگر P_1 و P_2 دو صفحه عمود بر $\vec{n}$ باشند که به ترتیب شامل l_1 و l_2 هستند. فاصله این دو صفحه، برابر با فاصله دو خط متنافر l_1 و l_2 است. برای پیدا کردن این فاصله کافیست دو نقطه دلخواه A و B را انتخاب کنیم و بردار AB را بر $\vec{n}$ تصویر کنیم.

مثال: $x = y = z$ ، $y-1 = z = \frac{x-5}{0}$ دو خط متنافر هستند.

$v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$

$\vec{n} = (0,-1,1)$, $A = (0,0,0)$, $B = (5,1,0)$

$\vec{AB} = (5,1,0)$

$$\mathrm{Proj}_{\vec{n}} \vec{AB} = \frac{(5,1,0)\cdot(0,-1,1)}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$$\left|\mathrm{Proj}_{\vec{n}} \vec{AB}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

کمی جبر خطی

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

مجموعه $\{X \in \mathbb{R}^n : (X-P)\cdot\vec{v} = 0\}$ یک ابرصفحه نامیده می‌شود که

از نقطه P می‌گذرد و بر راستای $\vec{v}$ عمود است.

تعریف. (زیرفضای k-بعدی در $\mathbb{R}^n$) اگر k تا بردار $u_1, \dots, u_k$ داشته باشیم که

در ویژگی زیر (استقلال خطی) صدق کنند مجموعه

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = \{t_1\vec{u}_1 + \dots + t_k\vec{u}_k : t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

یک زیرفضای k-بعدی نامیده می‌شوند.

تعریف استقلال خطی :

① بردار $u_1 \neq 0$

② $u_1 \not\parallel u_2$ یا به عبارتی $u_2 = \lambda u_1$ نباشد که $\lambda \in \mathbb{R}$.

③ $u_3 \notin \langle u_1, u_2 \rangle$

④ $u_4 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$\vdots$

$u_{i+1} \notin \langle u_1, \dots, u_i \rangle$

گزاره: بردارهای $\{u_1, \dots, u_k\}$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر رابطه

$$t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_k \vec{u}_k = 0$$

تنها برای مقادیر $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$ برقرار باشد.

مثال: آیا سه بردار $u_1=(1,0,1,0)$ ، $u_2=(0,1,1,-1)$ ، $u_3=(1,1,1,1)$ مستقل خطی هستند؟

بنابر گزاره قبل معادله $t_1\vec{u}_1+t_2\vec{u}_2+t_3\vec{u}_3=0$ را در نظر می‌گیریم

که t_1 ، t_2 و t_3 مجهول هستند. اگر تنها جواب این معادله $t_1=t_2=t_3=0$ باشد، آنگاه

این سه بردار مستقل خطی هستند.

$$0 = t_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}t_1+t_3\\t_2+t_3\\t_1+t_2+t_3\\-t_2+t_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} t_1=t_2=t_3=0$$

برای بررسی استقلال خطی k بردار $u_1, \dots, u_k$ در فضای $\mathbb{R}^n$ باید معادله

$$t_1 u_1 + \dots + t_k u_k = 0$$

را حل کنیم. این معادله در حقیقت n معادله و k مجهول است که معادل ضرب ماتریسی زیر است:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{array}\right]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix}}_{X} = 0$$

منظور این است که هر بردار u_i را به صورت ستونی در ستون i-ام ماتریس قرار می‌دهیم.

درواقع با معادله $AX=0$ روبرو هستیم که A ماتریس $n \times k$ است و X یک بردار k بعدی است که مجهول است. به رابطه $AX=0$ دستگاه خطی گوییم.

ریاضی عمومی ۲

جلسه چهارم ۹۶/۱۱/۲۹

کمی بیشتر از جبر خطی

مرور بر تعریف زیرفضا: اگر $\{u_1, \dots, u_k\}$، k بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^n$ باشند،

$$V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{t_1 u_1 + \dots + t_k u_k \;:\; t_i \in \mathbb{R}\}$$

یک زیرفضای k-بعدی $\mathbb{R}^n$ نامیده می‌شود. مجموعه V دارای این خاصیت است که

- $\vec{x}, \vec{y} \in V \implies \vec{x} + \vec{y} \in V$
- $r \in \mathbb{R}\,,\ \vec{x} \in V \implies r\vec{x} \in V$

تعریف: دو k بردار مستقل خطی $\{v_1, \dots, v_k\}$ که

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$$

آن را پایه زیرفضای می‌نامیم.

نکته: اگر $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ، n بردار مستقل در $\mathbb{R}^n$ باشند آنگاه زیرفضای تولیدشده توسط این بردارها برابر $\mathbb{R}^n$ است. به طور مشابه در یک زیرفضای k-بعدی V اگر k بردار مستقل پیدا کنیم حتماً پایه است برای V.

مثال:

$$e_1=(1,0,0,\dots,0)\ ،\ e_2=(0,1,0,\dots,0)\ ،\ \dots$$

$$e_i=(0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ام}}}{1},0,\dots,0)$$

$\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است.

مثال- $v_1=(1,0,0,\dots,0)\ ,\ v_2=(1,1,0,0,\dots,0)\ ,\ \dots\ ,\ v_n=(1,1,\dots,1)$

برای اینکه بررسی کنیم $\{v_1,\dots,v_n\}$ مستقل خطی هستند باید دستگاه زیر تنها جواب $X=0$ داشته باشد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر $\{u_1, \dots, u_k\}$ ، k تا بردار در زیرفضای k-بعدی V باشند که

$$V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

حالا این k-بردار مستقل خطی و درنتیجه پایه برای V است.

نکته: اگر $\{u_1, \dots, u_k\}$ یک پایه برای زیرفضای V باشد، و $X \in V$ یک بردار دلخواه باشد

درنتیجه ضرایب $t_1, \dots, t_k$ وجود دارند که

$$\vec{X} = t_1 \vec{u}_1 + \cdots + t_k \vec{u}_k$$

این ضرایب را نمایش بردار $\vec{X}$ در پایه $\{u_1, \dots, u_k\}$ می‌نامیم.

$$\vec{x} \longrightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix}$$

این نمایش منحصربه‌فرد است یعنی اگر $\vec{x}=t_1\vec{u}_1+\dots+t_k\vec{u}_k=\theta_1\vec{u}_1+\dots+\theta_k\vec{u}_k$

آنگاه $\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}$ زیرا

$$(t_1-\theta_1)\vec{u}_1+\dots+(t_k-\theta_k)\vec{u}_k=0$$

به علت استقلال خطی $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\}$ نتیجه می‌شود که $t_1-\theta_1=t_2-\theta_2=\dots=t_k-\theta_k=0$

برای پیدا کردن نمایش بردار $\vec{x}$ در پایه $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\}$ می‌توان از دستگاه خطی زیر استفاده کرد:

$$\vec{x}=t_1\vec{u}_1+\dots+t_n\vec{u}_n=\underbrace{\left[\vec{u}_1 \middle| \vec{u}_2 \middle| \dots \middle| \vec{u}_n\right]}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$AY=X \longrightarrow Y=?$$

مثال - صفحه تولید شده توسط بردارهای $\vec{u}_1=(1,1,1,1)$ را در نظر بگیرید و نمایش بردار

$\vec{u}_2=(1,-1,1,2)$

$\vec{a}=(5,-1,5,8)$ را در این پایه پیدا کنید.

$$t_1\vec{u}_1+t_2\vec{u}_2=\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\5\\8\end{bmatrix}$$ ← چهار معادله دو مجهول

اگر این دستگاه جواب نداشته باشد یعنی آن این است که $\vec{a}$ در صفحه بالا قرار ندارد.

و اگر جواب داشته باشد چون $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ مستقل خطی هستند حتماً جواب آن یکتا است.

$$\Longrightarrow \begin{aligned}t_1+t_2&=5\\t_1-t_2&=-1\end{aligned} \Longrightarrow t_1=2\ ,\ t_2=3$$

تذکر: بررسی دستگاه خطی $AX = b$ که A ماتریس $n \times k$ است ، X بردار k بعدی

و $b \in \mathbb{R}^n$ اهمیت زیادی دارد. اگر این دستگاه جواب داشته باشد یعنی بردار b یک ترکیب خطی

از ستونهای ماتریس A است و در واقع در زیرفضای تولید شده توسط ستونهای A قرار دارد.

در حالت $b=0$ اگر تنها جواب دستگاه $X=0$ باشد یعنی ستونهای A مستقل خطی هستند

و در این حالت به ازای هر بردار b دلخواه اگر دستگاه جواب داشته باشد، جواب آن یکتا است.

تبدیل خطی: نگاشت $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را خطی گوییم هرگاه

- $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
- $T(r\vec{x}) = rT(\vec{x})$

مثال- نگاشت $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ که A یک ماتریس $n \times m$ است یک تبدیل خطی است.

تعریف: تصویر نگاشت خطی T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Im}\,T = \{ y \in \mathbb{R}^n : \ Tx = y \text{ داریم } x \in \mathbb{R}^n \text{ به ازای لااقل یک بردار } \}$$

به راحتی می‌توان دید که $\mathrm{Im}\,T$ یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف- مجموعه زیر را فضای پوچ تبدیل خطی T می‌نامیم

$$\text{Null}\, T = \{ X \in \mathbb{R}^m \;:\; T(X) = 0 \}$$

فضای پوچ یک زیرفضای $\mathbb{R}^m$ است. (چرا؟ تمرین: بررسی کنید دو خاصیت زیرفضا را دارد)

قضیه رتبه -

$$\dim(\text{Null}\, T) + \dim(\text{Im}\, T) = m$$

نکته: برای تبدیل خطی $T(X) = AX$ که A ماتریس $n \times m$ است فضای پوچ در واقع تمام جوابهای دستگاه $AX=0$ است. اگر بعد همه جوابها l باشد، آنگاه زیرفضای تولیدشده توسط ستونهای A، $m-l$ بعدی است.

مثال- بعد زیرفضای تولید شده توسط بردارهای

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 3, 1)$$
$$\vec{u}_2 = (1, -1, -2, 0)$$
$$\vec{u}_3 = (2, 1, 1, 1)$$

را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قرار دهید $T(X) = AX$. تصویر نگاشت T در واقع زیرفضای تولید شده توسط ستون‌های A است.

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\dim(\operatorname{Im} T) = 3 - \dim(\operatorname{Null} T)$$

$$\operatorname{Null} T = \{ X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = y = -z$$

$$\text{Null}\,T = \{(x, y, z) \;:\; x = y = -z\}$$

$$= \{(t, t, -t) \;:\; t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1) \rangle$$

$\dim \operatorname{Im} T = 2 \quad \Leftarrow$. یک بعدی است

تعریف- زیرفضای مستوی: اگر $V=\langle u_1,\dots,u_k\rangle$ یک زیرفضای k-بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد،

و $p\in\mathbb{R}^n$ یک نقطه $\mathbb{R}^n$، آنگاه

$$P+\langle u_1,\dots,u_k\rangle=\{P+t_1\vec{u}_1+\dots+t_k\vec{u}_k : t_i\in\mathbb{R}\}$$ زیرفضای مستوی k-بعدی

که از نقطه P می‌گذرد.

برای نمایش‌دهی یک زیرفضای مستوی k-بعدی در $\mathbb{R}^n$، $n-k$ بردار عمود بر زیرفضا و مستقل وجود دارند

که آنها را $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-k}$ می‌نامیم زیرفضای مستوی گذرا از P شامل نقاط $X\in\mathbb{R}^n$

است که

$$(X-P)\cdot\vec{v}_1=(X-P)\cdot\vec{v}_2=\dots=(X-P)\cdot\vec{v}_{n-k}=0$$

در واقع نمایش جبری یک زیرفضای مستوی k-بعدی دلخواه به صورت زیر است:

$$X\cdot\vec{v}_1 = P\cdot\vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n-k,1}x_1+\cdots+a_{n-k,n}x_n=b_{n-k} \end{cases}$$
$$X\cdot\vec{v}_{n-k} = P\cdot\vec{v}_{n-k} \Rightarrow$$

در حقیقت جوابهای این دستگاه $AX=b$ به صورت $P+\mathrm{Null}(A)$ است که P یک نقطه

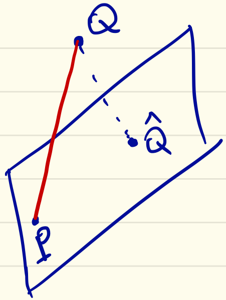
زیرفضای مستوی است یا یک جواب این دستگاه.

تذکر: چون بردارهای $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}$ مستقل خطی هستند، بعد جوابهای دستگاه فوق k بعدی میشود. در حالت کلی

اگر معادله ها $\begin{cases} X\cdot\vec{v}_1=b_1 \\ \vdots \\ X\cdot\vec{v}_m=b_m \end{cases}$ را داشته باشیم و بعد زیرفضای تولید شده توسط

$\dim(\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\rangle)=l$

آنگاه جوابهای این دستگاه $n-l$ بعدی است.



فاصله نقطه Q تا زیرفضای مستوی $V = P + \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

$$\begin{cases} X \cdot v_1 = b_1 \\ \vdots \\ X \cdot v_\ell = b_\ell \end{cases}$$

معادله زیرفضا

$$\hat{Q} = P + t_1 \vec{u}_1 + \cdots + t_k \vec{u}_k$$

$$\overrightarrow{Q\hat{Q}} \perp V \implies \overrightarrow{Q\hat{Q}} \cdot u_i = 0 \qquad 1 \le i \le k$$

k معادله $\rightarrow$ $(P-Q) \cdot u_i + t_1 (u_1 \cdot u_i) + \cdots + t_k (u_k \cdot u_i) = 0$

k مجهول

حل این دستگاه ضرایب $(t_1, \dots, t_k)$ را مشخص می‌کند.

بدین ترتیب نقطه $\hat{Q}$ را می‌توان پیدا کرد.

ماتریس ضرایب این دستگاه خطی به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} (u_1 \cdot u_1) & (u_1 \cdot u_2) & \cdots & (u_1 \cdot u_k) \\ (u_2 \cdot u_1) & (u_2 \cdot u_2) & \cdots & (u_2 \cdot u_k) \\ \vdots & & & \\ (u_k \cdot u_1) & (u_k \cdot u_2) & \cdots & (u_k \cdot u_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q-P) \cdot u_1 \\ \vdots \\ (Q-P) \cdot u_k \end{bmatrix}$$

اگر بردارهای u_i طوری انتخاب شوند که دو به دو بر هم عمود باشند آنگاه ماتریس بالا بسیار ساده خواهد شد و دستگاه فوق به راحتی حل می‌شود.

ریاضی عمومی ۲

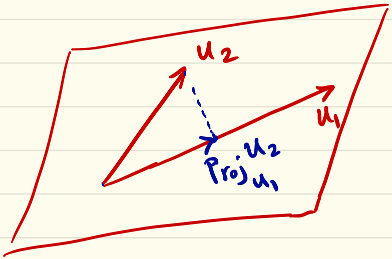
جلسه پنجم ۹۶/۱۲/۶

تعریف: پایه‌ی $\{v_1, \dots, v_k\}$ را **متعامد** گوییم هرگاه دوبه‌دو بر هم عمود باشند. یعنی $v_i \cdot v_j = 0$

وقتی $i \neq j$. همچنین این پایه را **متعامد یکه** گوییم هرگاه طول هر بردار یک باشد. $|v_i| = 1$.

الگوریتم گرام-اشمیت:

فرض کنید $\{u_1, \dots, u_k\}$ پایه‌ای برای زیرفضای V باشند. هدف این است که پایه‌ی جدیدی برای V پیدا کنیم که متعامد (یکه) باشد.



اگر V یک زیرفضای ۲ بعدی باشد که با $\{u_1, u_2\}$ تولید شده است

قرار می‌دهیم

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - Proj_{u_1}^{u_2} = u_2 - \frac{(u_2 \cdot u_1)}{|u_1|^2} u_1$$

به راحتی می‌توان دید که $v_1 \cdot v_2 = 0$.

سؤال: چرا $\{v_1, v_2\}$ پایه‌ی V هستند؟

$$V = \langle u_1, u_2 \rangle = \{ t_1 \vec{u}_1 + t_2 \vec{u}_2 \;:\; t_i \in \mathbb{R} \}$$

به وضوح $v_1, v_2 \in V$. برای اینکه این دو بردار پایه‌ی باشند کافی است یکی از این دو حقیقت را نشان دهیم

(i) $V = \langle v_1, v_2 \rangle$

(ii) $\{v_1, v_2\}$ مستقل خطی هستند.

این دو گزاره معادل هستند.

اثبات (ii)

$$r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 = 0$$

$$r_1 \vec{u}_1 + r_2 \left(\vec{u}_2 - \frac{(u_1 \cdot u_2)}{|u_1|^2} \vec{u}_1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(r_1 - r_2 \frac{(u_1 \cdot u_2)}{|u_1|^2} \right) \vec{u}_1 + r_2 \vec{u}_2 = 0 \xRightarrow{\{u_1, u_2\} \text{ مستقل هستند}} \begin{cases} r_2 = 0 \\ r_1 - r_2 \frac{(u_1 \cdot u_2)}{|u_1|^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$$

عملگر تصویر بر صفحه: اگر $\{v_1, v_2\}$ پایه متعامد صفحه باشند و u یک بردار دلخواه

$$\operatorname{Proj}_{\langle v_1, v_2\rangle} u = \frac{(u \cdot v_1)}{|v_1|^2} v_1 + \frac{(u \cdot v_2)}{|v_2|^2} v_2$$

تمرین: رابطه بالا را ثابت کنید.

عملگر تصویر بر زیرفضای k بعدی: اگر $\{v_1, \ldots, v_k\}$ پایه متعامد این زیرفضا باشد

$$\operatorname{Proj}_V u = \frac{(u \cdot v_1)}{|v_1|^2} v_1 + \cdots + \frac{(u \cdot v_k)}{|v_k|^2} v_k$$

الگوریتمِ گرام-اشمیت برای زیرفضای k-بعدی :

فرض کنید $\{u_1,\dots,u_k\}$ یک پایه برای این زیرفضا باشد قرار دهید :

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}^{u_2}$$

$$v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{\langle v_1, v_2 \rangle}^{u_3}$$

$$\vdots$$

$$v_i = u_i - \mathrm{Proj}_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}^{u_i} = u_i - \frac{(u_i \cdot v_1)}{|v_1|^2} v_1 - \dots - \frac{(u_i \cdot v_{i-1})}{|v_{i-1}|^2} v_{i-1}$$

$$\vdots$$

$$v_k = \dots$$

استقلال خطی $\{v_1, \dots, v_k\}$

فرض کنید $t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0$

رابطه بالا را در v_i ضرب کنید:

$$t_1(v_1 \cdot v_i) + \dots + t_k(v_k \cdot v_i) = 0$$

چون $\{v_i\}$ متعامد هستند در نتیجه همه روابط $v_j \cdot v_i = 0$ برای $j \neq i$.

$$\Rightarrow \quad t_i(v_i \cdot v_i) = 0 \xrightarrow{v_i \neq 0} t_i = 0$$

اگر $v_i = 0$ باشد باید $u_i = \mathrm{Proj}_{\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle}^{u_i}$ یعنی

$$u_i \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle \Rightarrow$$ که با استقلال خطی $\{u_1, \dots, u_k\}$ تناقض دارد.

تعریف: فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند، این دو را موازی گوییم هرگاه، وقتی آنها را به مبدأ منتقل کنیم بر هم منطبق باشند. یعنی اگر $P_1 \in E_1$ و $P_2 \in E_2$ دو نقطه دلخواه باشند،

$$E_1 - P_1 = E_2 - P_2$$

حالتهای مختلف دو صفحه در $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} p + \langle u_1, u_2 \rangle \\ q + \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

الف) اگر $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ این دو موازی هستند فاصله این دو صفحه برابر است با:

$$\left| p - q - \mathrm{Proj}_{\langle u_1, u_2 \rangle}^{p-q} \right|$$

(نن) دو صفحه متنافر: مثال صفحه $\langle e_1, e_2\rangle = \{(x,y,0,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$ و

صفحه $e_4 + \langle e_1, e_3\rangle = \{(x,0,z,1) : x,z\in\mathbb{R}\}$

متنافر هستند چون این دو اشتراکی ندارند به علاوه موازی نیستند. چون اولی از مبدأ می‌گذرد

وقتی دومی را به مبدأ منتقل می‌کنیم صفحه $\langle e_1, e_3\rangle$ خواهد بود که با قبلی متفاوت است

$$p + \langle u_1, u_2\rangle = \{p + t_1 u_1 + t_2 u_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$q + \langle v_1, v_2\rangle = \{q + s_1 v_1 + s_2 v_2 : s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$$

اشتراک این دو صفحه معادل این است که مقادیرِ t_1، t_2، s_1 و s_2 وجود داشته باشند که

$$p + t_1 u_1 + t_2 u_2 = q + s_1 v_1 + s_2 v_2$$

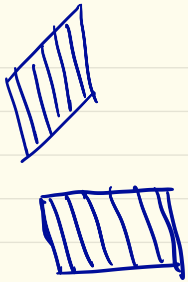
$$[u_1 | u_2 | v_1 | v_2] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -s_1 \\ -s_2 \end{bmatrix} = q - p$$

نکته: اگر زیرفضای تولیدشده توسط $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ ، ۴ بعدی باشد یعنی باید برابر $\mathbb{R}^4$ باشند، حتماً دستگاه قبلی جواب دارد و جواب آن یکتا است. یعنی در این حالت اشتراک دو صفحه یک نقطه خواهد بود.

مثال- دو صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ و $\langle e_3, e_4 \rangle$ اشتراکشان تنها یک نقطه است.

جمع‌بندی: اگر زیرفضای تولیدشده توسط $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ دو بعدی باشد، آنگاه انتقال‌یافتهٔ دو صفحه به مبدأ، هم منطبق هستند و این دو صفحه موازی خواهند بود.

اگر زیرفضای تولیدشده توسط $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ سه بعدی باشد، در این حالت دو صفحه یا اشتراک ندارند یا اشتراک آنها یک خط خواهد بود. (چرا؟ سعی کنید به کمک قضیه رتبه صحت این مطلب را بررسی کنید.)



نکته: اگر دو صفحه متنافر باشند، در هر صفحه می‌توان یک خط انتخاب کرد که این دو موازی باشند.

مثال:

$$\langle \underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1} , \underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2} \rangle$$

$$(1,1,1,2) + \langle \underbrace{(1,0,0,0)}_{v_3} , \underbrace{(0,1,0,0)}_{v_4} \rangle$$

راستای $\vec{u}$ را پیدا کنید که در هر صفحه یک خط موازی آن راستا وجود دارد.

$$\vec{u} \in \langle v_1 , v_2 \rangle \cap \langle v_3 , v_4 \rangle$$

$$\vec{u} = t_1 v_1 + t_2 v_2 = t_3 v_3 + t_4 v_4$$

$$\Rightarrow \left[v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4 \right] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_3 \\ -t_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_3 = 0 \\ -t_1 - t_4 = 0 \\ t_2 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad t_1 = t_3 = -t_4 \quad , t_2 = 0$$

$$\vec{u} = v_1 = v_3 - v_4$$

<u>فاصله دو صفحه متنافر</u>: تنها یک راستا وجود دارد که بر هر دو صفحه عمود است .

$$p + \langle u_1 , u_2 \rangle \quad , \quad q + \langle v_1 , v_2 \rangle$$

می‌دانیم زیرفضای تولید شده توسط $\{u_1 , u_2 , v_1 , v_2\}$ سه‌بعدی است و راستای $\vec{n}$

که بر همه اینها عمود باشد از حل دستگاه زیر به دست می‌آید :

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot u_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot u_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot v_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

بنابر قضیه رتبه بعد فضای جواب این دستگاه
یک بعدی است.

فاصله دو صفحه برابر است با طول تصویر بردار $p-q$ بر راستای $\vec{n}$.

مثال: در مثال قبل فاصله دو صفحه را حساب کنید.

$$\langle \underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2} \rangle$$

$$(1,1,1,2) + \langle \underbrace{(1,0,0,0)}_{v_3}, \underbrace{(0,1,0,0)}_{v_4} \rangle$$

$$\vec{n} \cdot v_i = 0 \implies \begin{cases} x-y=0 \\ z+t=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \implies \vec{n} = (0,0,z,-z)$$

$$\vec{n} = (x,y,z,t)$$

فاصله دو صفحه $= \left| \mathrm{Proj}_{\vec{n}}^{(1,1,1,2)} \right| = \left| \dfrac{(1,1,1,2)\cdot(0,0,1,-1)}{|\vec{n}|^2}\, \vec{n} \right|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه ششم ۹۶/۱۲/۸

دترمینان

$$\det [a] = a$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$B_i =$ حذف سطر اول و ستون i-ام ماتریس A

$$= \begin{bmatrix} a_{21} \cdots a_{2\,i-1}, & a_{2\,i+1}, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} \cdots a_{n\,i-1}, & a_{n\,i+1}, & \cdots, & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \times \det B_1 - a_{12} \det B_2 + a_{13} \det B_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det B_n$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \times \det [d] - b \times \det [c] = ad - bc$$

نکته: برای محاسبه دترمینان می‌توان نسبت به هر سطر یا ستون دیگر نیز بسط داد.

اگر C_{ij} ماتریس A از حذف سطر i-ام و ستون j-ام آنگاه

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det C_{ij}$$

خواص دترمینان: ① اگر هر سطر ماتریس را در عدد حقیقی α ضرب کنیم دترمینان α برابر می‌شود.

②
$$A = \begin{bmatrix} u+v \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} u \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} v \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

③ اگر جای دو سطر ماتریس را عوض کنیم علامت دترمینان عوض می‌شود.

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

(اثبات) ماتریس سمت راست را نسبت به سطر دوم بسط دهید و ماتریس سمت چپ را نسبت به سطر اول.

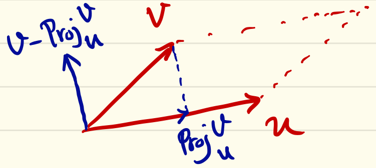
تمرین: سه خاصیت بالا را به کمک تعریف بسط دترمینان اثبات کنید.

نتیجه: اگر دو سطر ماتریس برابر باشند، دترمینان صفر است.

تعریف حجم:

اگر u و v دو بردار در صفحه باشند، مساحت متوازی الاضلاع تشکیل شده توسط این دو بردار برابر است با

$$\left|\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right|$$



مساحت متوازی الاضلاع $= |u| \times$ ارتفاع $= |u| \times \left| v - \mathrm{Proj}_u^v \right|$

$$= |u| \times |v - \lambda u| \qquad \lambda = \frac{(u \cdot v)}{|u|^2}$$

$$\det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \det\begin{bmatrix} u \\ v - \lambda u \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} u \\ -\lambda u \end{bmatrix}}_{-\lambda \det\begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = 0}$$

$$\left|\det\begin{bmatrix}u\\ v-\lambda u\end{bmatrix}\right| = |u| \times |v-\lambda u|$$ بنابراین کافیست رابطه

را ثابت کنیم با توجه به اینکه u و $v-\lambda u$ بر هم عمود هستند. همین کافیست رابطه

$$\left|\det\begin{bmatrix}u\\ w\end{bmatrix}\right| = |u| \times |w|$$

با فرض $u \cdot w = 0$ را ثابت کنیم.

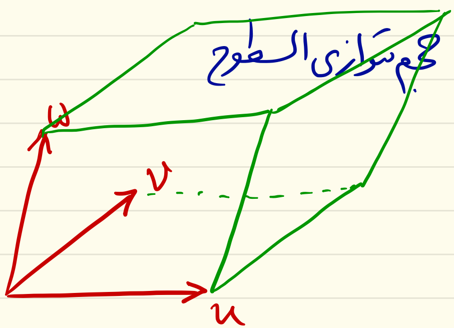
$$u=(a,b) \quad , \quad w=(c,d)$$

$$u \cdot w = 0 \Rightarrow ac = -bd$$

$$\det\begin{pmatrix}u\\ w\end{pmatrix} = ad-bc$$

$$(ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$ کافیست ثابت کنیم

حجم در $\mathbb{R}^3$: سه بردار u، v و w را در $\mathbb{R}^3$ درنظر بگیرید و حجم متوازی السطوح تولید شده توسط این سه بردار برابر است با



$$\det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

حجم $=$ (مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط u و v) $\times$ ارتفاع

ارتفاع $= \left| w - \mathrm{Proj}_{\langle u,v\rangle}^{w} \right|$

$$\mathrm{Proj}_{\langle u,v\rangle}^{w} = \alpha u + \beta v$$

از طرف دیگر

$$\det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w-\alpha u-\beta v \end{pmatrix}$$

اگر v را هم به u تصویر کنیم

$$\det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u \\ v - \mathrm{Proj}_u^{\,v} \\ w - \mathrm{Proj}_{\langle u,v\rangle}^{\,w} \end{pmatrix}$$

پس می‌توان فرض کرد که سه بردار u، v و w دوبه‌دو بر هم عمودند کافیست قضیه زیر را اثبات کنیم:

<u>قضیه</u>: اگر $u.v = u.w = v.w = 0$، آنگاه

$$\left|\det\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right| = |u|.|v|.|w|$$

نکته: قضیه بالا را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ تعمیم داد بدین صورت که اگر $u_1, \dots, u_n$، n بردار متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند

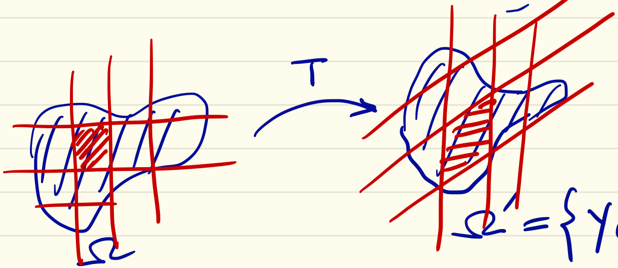
آنگاه

$$\left|\det\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right| = |u_1| \times \cdots \times |u_n|$$

و این مطلب نشان می‌دهد که در حالت کلی حجم شکل تولید شده توسط n بردار دلخواه در $\mathbb{R}^n$ با دترمینان آن بردارها برابر است.

فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که $T(X) = AX$ و A یک ماتریس 3×3

است. ناحیه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ توسط T به ناحیه Ω' تصویر می‌شود.



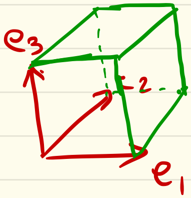
$$\Omega' = \{ Y \in \mathbb{R}^3 \; : \; Y = T(x) \; , \; x \in \Omega \}$$

سؤال: حجم ناحیه Ω' چه ارتباطی به حجم ناحیه Ω دارد؟

اگر Ω را به تعداد مکعب او از تقسیم کنیم Ω' به متوازی السطوح تولید شده توسط تصویر این مکعب‌ها افراز می‌شود.

حجم Ω' جمع حجم این متوازی السطوح‌ها است.

مکعب تولید شده توسط $e_1=(1,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0)$ و $e_3=(0,0,1)$ را در نظر بگیریم



تصویر این مکعب توسط تبدیل خطی T یک متوازی السطوح است که توسط بردارهای

$$T(e_1) = Ae_1 = A \text{ ستون اول}$$

$$T(e_2) = Ae_2 = A \text{ ستون دوم}$$

$$T(e_3) = Ae_3 = A \text{ ستون سوم}$$

تولید شده است. در واقع حجم این متوازی السطوح برابر است با $\det A$.

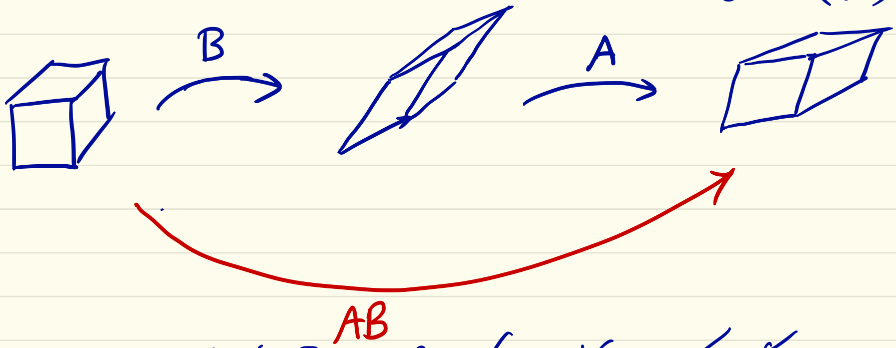
به طوری که اگر به جای مکعب به ضلع یک، مکعب به ضلع α در نظر بگیریم، مثل اینکه مکعب ساخته شده توسط αe_1 ، αe_2 و αe_3 را در نظر بگیریم و تصویر آن را توسط T به دست آوریم، تصویر متوازی السطوح است که توسط ستون‌های ماتریس αA به دست آمده است. که حجم آن برابر است با

$$\det(\alpha A) = \alpha^3 \det A$$

$$= (\text{حجم مکعب به ضلع } \alpha) \times \det A$$

نتیجه: حجم S' = (حجم S) $\times \det A$

گزاره: $\det(AB) = \det A \times \det B$



تعریف: ماتریس $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ همانی گوییم اگر روی قطر اصلی یک باشه و بقیه درایه‌ها صفر.

ماتریس A را وارون‌پذیر گوییم اگر ماتریس B وجود داشته باشد که $AB = BA = I$

در این صورت B را با A^{-1} نشان می‌دهیم.

به سادگی می‌توان دید که $\det I = 1$ و اگر A وارون پذیر باشد

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = (\det A)\times(\det A^{-1})$$

در نتیجه:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

قضیه: ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

حل دستگاه خطی n معادله، n مجهول به کمک دترمینان $\leftarrow$ قاعده کرامر (در کتاب مطالعه شود)

تعریف: ترانهاده ماتریس A ماتریسی است که با جابجایی سطر و ستون‌های A به دست می‌آید که با نماد A^T نشان می‌دهیم در واقع

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} A_1^T & \Big| \cdots \Big| & A_n^T \end{bmatrix}$$

که اگر $A_i=(x_1,\dots,x_n)$ ، داریم

$$A_i^T=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ماتریس ترانهاده دارای این خاصیت است که برای دو بردار $X,Y\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$(AX)\cdot Y = X\cdot(A^TY)$$

ضرب داخلی

قضیه: $$\det A=\det A^T$$

نکته: قضیه فوق نشان می‌دهد (!) که برای محاسبه دترمینان می‌توان سطر یا ستونی نوشت.

قضیه: اگر $u_1, \dots, u_n$، بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر که $\det A \neq 0$

$$A = [u_1 | u_2 | \cdots | u_n]$$

اگر این بردارها مستقل خطی نباشند، دستگاه $AX=0$ جواب غیربدیهی $X \neq 0$ دارد یعنی فضای پوچ $\text{Null}\, A \neq \{0\}$

و $\dim(\text{Null}\, A) \geq 1$. بنابر قضیه رتبه $\dim(\text{Im}\, A) \leq n-1$

بنابراین تصویر مکعب به ضلع یک تحت نگاشت $X \longmapsto AX$ در یک زیرفضای $n-1$ بعدی قرار دارد و

در نتیجه حجم آن صفر است. از طرفی حجم تصویر باید $\det A$ باشد.

ریاضی عمومی ۲

جلسه هفتم ۹۶/۱۲/۱۳

خم‌های درجه ۲ در صفحه

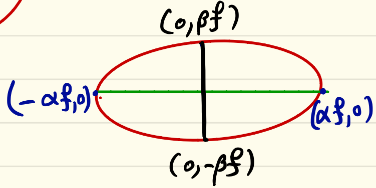
$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=F.$$

الف_ حالت ساده وقتی $C=D=E=0$ هستند.

$$Ax^2+By^2=F$$

① دایره وقتی $A=B$ و $x^2+y^2=\frac{F}{A}>0$

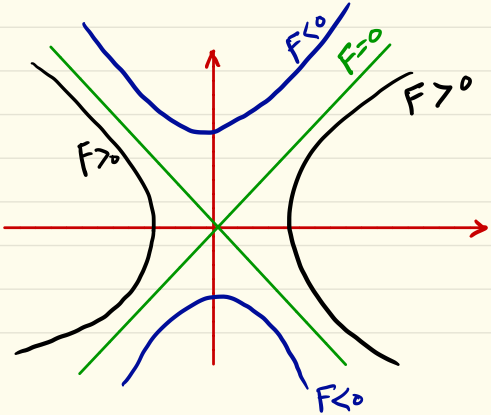
② بیضی $A,B,F>0$, $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=f^2>0$



③ نقطه، $F=0$ و $A,B>0$

④ تهی $A,B>0$, $F<0$

⑤ $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=F$



ب- حالت کلی : $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=F$.

$B\neq 0$ اگر $\Rightarrow \left(A-\frac{C^2}{4B}\right)x^2+B\left(y+\frac{C}{2B}x\right)^2+\left(D-\frac{EC}{2B}\right)x+E\left(y+\frac{C}{2B}x\right)=F$

$$\tilde{y}:=y+\frac{C}{2B}x \Rightarrow \tilde{A}x^2+B\tilde{y}^2+\tilde{D}x+E\tilde{y}=F$$

$$X=x+\frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\ ,\ Y=\tilde{y}+\frac{E}{2B} \Rightarrow$$

$$\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \tilde{D}/2\tilde{A} \\ E/2B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{C}{2B} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-C}{2B} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{C}{2B} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

حالت ۴ $\quad B=0 \,,\, A\neq 0$ در این حالت با تغییر متغیر $\tilde{x} = x + \frac{C}{2A}$ می‌توان ضریب C را صفر کرد

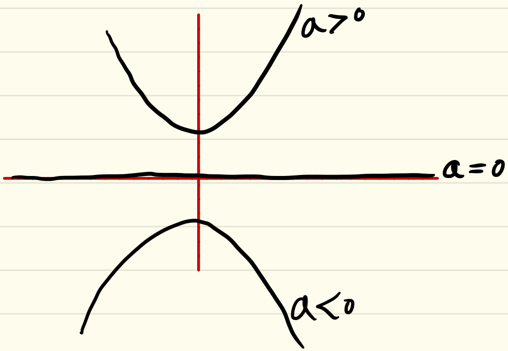
و با تغییر متغیر $X = \tilde{x} + \frac{D}{2A}$ ضریب D را صفر می‌کنیم و به شکل ساده زیر می‌رسیم:

$$Ax^2 + Ey = F$$

با انتقال $Y = y - \frac{F}{E}$ می‌توان ضریب F را از بین برد و فرم ساده‌تر

$$y = ax^2$$

رسید. که یک سهمی است.



نکته : وقتی $A=B=0$ ، $Cxy+Dx+Ey=F$ و $C\neq 0$ (در حالت $C=0$ معادله خط است)

$$x=X-\alpha \ , \quad y=Y-\beta$$

$$C(X-\alpha)(Y-\beta)+D(X-\alpha)+E(Y-\beta)=F$$

$$CXY+(\underbrace{E-\alpha C}_{=0})Y+(\underbrace{D-\beta C}_{=0})=F+D\alpha+E\beta-C\alpha\beta$$

$$\alpha=\frac{E}{C} \ , \ \beta=D/C \quad \Rightarrow \quad XY=d$$

این معادله یک هذلولی است که در حالت ⑤ بررسی کردیم. در ⑤ هذلولی به صورت

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=f$$

نوشته شده بود که آن را به صورت $\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)=f$ می‌توان نوشت و با تغییر متغیر

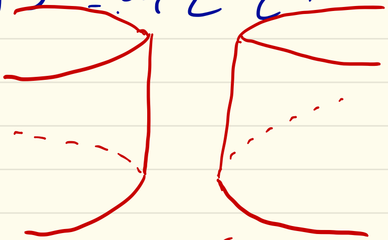
$$X=\frac{x}{\alpha}-y/\beta \ , \quad Y=\frac{x}{\alpha}+y/\beta$$

به صورت $XY=f$ در می‌آید.

سطوح درجه ۲ در فضا : $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J$

الف حالت ساده $D=E=F=G=H=I=0$. $Ax^2+By^2+Cz^2=J$

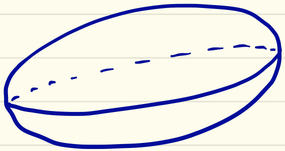
۱) اگر $C=0$ ، سطح به دست آمده یک استوانه است در راستای (محور) z با سطح مقطع هم درجه ۲ ، $Ax^2+By^2=J$



استوانه با سطح مقطع هذلولی

۲) بیضی‌گون $A,B,C>0$, $J>0$

$J=0$ یک نقطه است و $J<0$ تهی است .

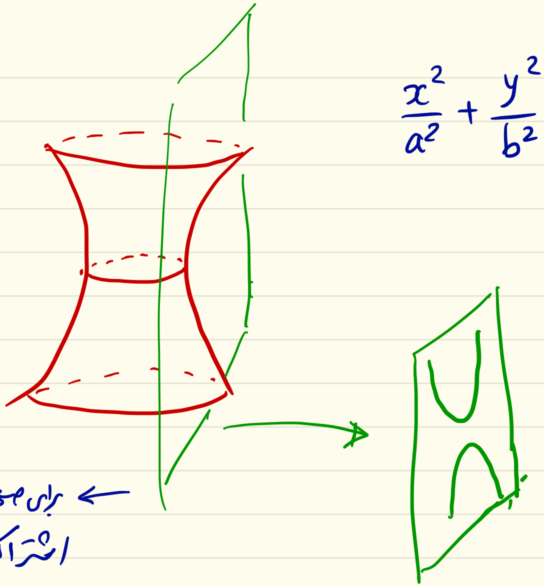


در این حالت هم برش‌های افقی یا صفحه $z=$ تعداد ثابت یک بیضی خواهد بود. همینطور برای برش‌های $x=$ تعداد ثابت یا $y=$ تعداد ثابت .

۳) هذلولی‌گون

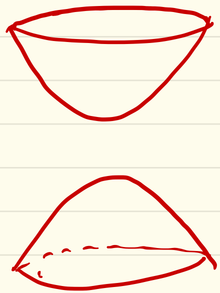
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=d$$

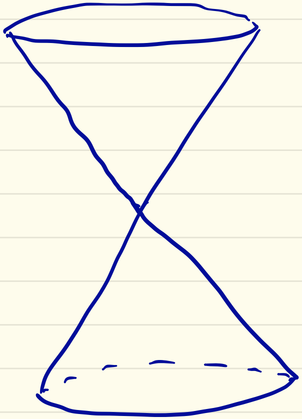
* اگر $d>0$ هذلولی‌گون یکپارچه



برای صفحه $y=\pm b\sqrt{d}$ اشتراک دو خط متقاطع است.

* اگر $d<0$ هذلولی‌گون دوپارچه





۴) $d=0$ ، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

شکل مخروط است.

اگر (x,y,z) در معادله صدق کند آنگاه $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ برای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ در معادله صدق می‌کند.

ب- $D=E=F=0$ ، $Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz=J$

با انتقال $X=x+\frac{G}{2A}$ ، $Y=y+\frac{H}{2B}$ ، $Z=z+\frac{I}{2C}$ می‌توان فرض کرد که ضرایب G ، H ، I همواره [illegible]

مشروط به اینکه $A,B,C\neq 0$

۵) اگر $A=B=C=0$ معادله صفحه است.

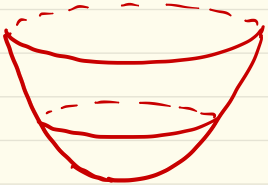
حالت $C=0$ ، $A, B \neq 0$ ← در این حالت می‌توان ضرایب G و H را صفر کرد و ضریب I باقی می‌ماند.

همچنین می‌توان ضریب J را صفر کرد. صورت ساده شده به شکل زیر است

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = z$$

۶) سهمی‌گون بیضوی:

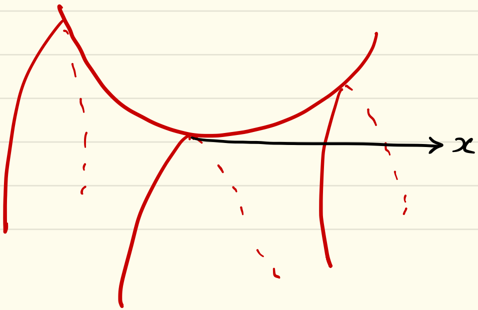
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

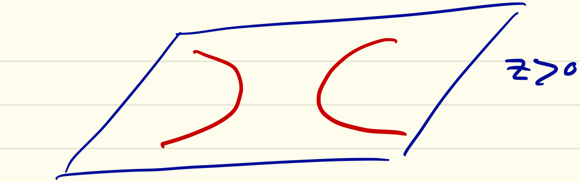


برش‌های افقی $z=$ ثابت بیضی است و برش‌های عمود $x=$ ثابت یا $y=$ ثابت یک سهمی است.

۷) سهمی‌گون هذلولوی

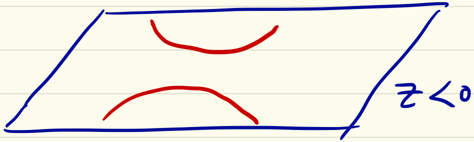
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$





برشهای افقی هذلولی است

اشتراک با صفحه $z=0$ دو خط متقاطع است.



نکته - اگر $A\neq 0$ و $B=C=0$ در این حالت می‌توان به فرم ساده زیر رسید:

$$x^2+by+cz=0$$

که در واقع یک استوانه با سطح مقطع سهمی است. (چرا؟)

ج ـ حالت کلی :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz=J$$

مشابه حالت دو متغیره سعی می‌کنیم ضرایب D، E و F را صفر کنیم. فرم درجه ۲

$$Q(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz$$

را که به آن یک فرم درجه ۲ می‌گوییم، می‌توان نوشت

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad Q=X^tAX$$

برای ماتریس متقارن A به فرم زیر:

$$A=\begin{pmatrix}A & \frac{D}{2} & E/2\\ \frac{D}{2} & B & F/2\\ E/2 & F/2 & C\end{pmatrix}$$

هر تغییر متغیر را می‌توان به صورت $Y = PX$ نوشت که P یک ماتریس 3×3 وارون‌پذیر است.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = P^{-1} Y$$

$$Q = X^t A X = Y^t \underbrace{(P^{-1})^t A P^{-1}}_{B} Y$$

B یک ماتریس متقارن است زیرا

$$B^t = \left((P^{-1})^t A P^{-1}\right)^t = (P^{-1})^t A^t \left((P^{-1})^t\right)^t$$
$$= (P^{-1})^t A P^{-1} = B$$

فرم Q در متغیر جدید Y یک چندجمله‌ای درجه دو برحسب (y_1, y_2, y_3) است. برای اینکه ضرایب y_1y_2 ، y_1y_3 و y_2y_3 صفر باشد باید ماتریس B قطری باشد یعنی

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

در این صورت فرم Q در متغیر جدید به صورت

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

ساده می‌شود.

خلاصه بحث: برای ساده سازی باید ماتریس P پیدا شود که

$$(P^{-1})^t A P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

برای سادگی قرار دهید $R = P^{-1}$ ، باید

$$AR = P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

سعی می‌کنیم با فرض $P^{-1} = P^t$ ماتریس P را پیدا کنیم. یعنی باید

$$AR = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} = (R_1 | R_2 | R_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 R_1 | \lambda_2 R_2 | \lambda_3 R_3)$$

$$AR = A\left(R_1 \mid R_2 \mid R_3\right) = \left(AR_1 \mid AR_2 \mid AR_3\right)$$

در واقع روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} AR_1 = \lambda_1 R_1 \\ AR_2 = \lambda_2 R_2 \\ AR_3 = \lambda_3 R_3 \end{cases}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه هشتم ۹۶/۱۲/۱۵

تعریف: اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد، λ را مقدار ویژه A گوییم هرگاه یک بردار ناصفر $\vec{u}$ وجود داشته باشد که

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

بردار $\vec{u}$ را بردار ویژه A گوییم.

در واقع راستای $\vec{u}$ تحت نگاشت خطی $x \longmapsto Ax$ حفظ می‌شود (یا به عبارتی به خودش تصویر می‌شود)

برای پیدا کردن λ و $\vec{u}$ دقت کنید که دستگاه خطی

$$(A-\lambda I)X = 0$$

باید جواب ناصفر داشته باشد. در واقع همه جواب‌های این دستگاه بردارهای ویژه متناظر λ خواهند بود.

اگر ماتریس $A-\lambda I$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه این دستگاه خطی تنها جواب $X=0$ دارد. بنابراین

مقدار ویژه λ دارای این خاصیت است که ماتریس $A-\lambda I$ وارون‌پذیر نیست. در نتیجه باید

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

برای پیدا کردن مقادیر ویژه ماتریس A، باید λ هایی را پیدا کنیم که $\det(A-\lambda I)=0$. از طرفی اگر بسط دترمینان $\det(A-\lambda I)$ را بنویسیم یک چندجمله‌ای درجه n برحسب متغیر λ به دست می‌آید. ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه A را مشخص می‌کنند.

مثال ۱: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda)+1 = \lambda^2-\lambda-1$$

$$\lambda^2-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \to$$ مقادیر ویژه A

$$\Big(A-\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\lambda} I\Big)X=0 \Rightarrow \begin{cases}(2-\lambda)x+y=0\\ -x-(1+\lambda)y=0\end{cases} \qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$y=(\lambda-2)x \Rightarrow X = x\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{5}-3}{2}\end{pmatrix} \to$$ بردار ویژه متناظر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

مثال ۲:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & 1 & 4\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 8 & -4\\ 8 & 1-\lambda & 4\\ -4 & 4 & 7-\lambda\end{pmatrix}$$

چندجمله‌ای درجه ۳ برحسب متغیر λ ←

$$\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(7-\lambda)-16\right]-8\left[8(7-\lambda)+16\right]$$
$$-4\left[32+4(1-\lambda)\right]=-(\lambda+9)(\lambda-9)^2$$

ریشه‌های این چندجمله‌ای عبارتند از $\lambda=+9,+9,-9$

$$(A-9I)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}-8x+8y-4z=0\\ 8x-8y+4z=0\\ -4x+4y-2z=0\end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 2(y-x)\end{pmatrix}$$

$x\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$ بردارهای ویژه مستقل متناظر مقدار ویژه $\lambda=9$ هستند.

تذکر: اگر ماتریسِ A یکِ مقدار ویژه تکراری داشته باشه یعنی λ ریشه تکراری چندجمله ای $\det(A-\lambda I)=0$ باشد
ممکن است به تعداد تکرار این ریشه بردار ویژه مستقل خطی پیدا نکنیم. مثلاً در ماتریس زیر $\lambda=1$ مقدار ویژه با تکرار ۲ است
و تنها یک بردار ویژه مستقل خطی داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

از طرفی لزومی ندارد که یک ماتریسِ $n\times n$، A n مقدار ویژه (حقیقی) داشته باشه به عنوان مثال ماتریسِ

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که دوران $\frac{\pi}{2}$ است مقدار ویژه حقیقی ندارد.

قضیه: اگر A یک ماتریس متقارن $n\times n$ باشد، آنگاه با احتساب تکرار دارای n مقدار ویژه حقیقی است.

به علاوه این ماتریس دقیقاً n بردار ویژه مستقل دارد که دو به دو بر هم عمودند.

$$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \qquad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \ \text{ for } i \neq j$$

$$A\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$$

مثال ۳: در مثال ۲ بردار ویژه متناظر $\lambda=-9$ عبارتست از:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10x + 8y - 4z = 0 \\ 8x + 10y + 4z = 0 \\ -4x + 4y + 16z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = x - y \\ 9x + 9y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -x \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow$$ بردار ویژه متناظر $\lambda=-9$

این بردار ویژه، بر صفحه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=9$ عمود است :

صفحه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-9$ $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = P$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \perp P$$

اگر قرار دهیم $R = \left(\vec{u}_1 \middle| \cdots \middle| \vec{u}_n \right)$ ،

$$AR = \left(A\vec{u}_1 \middle| A\vec{u}_2 \middle| \cdots \middle| A\vec{u}_n \right)$$

$$= \left(\lambda_1 \vec{u}_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n \vec{u}_n \right) = \underbrace{\left(\vec{u}_1 \middle| \cdots \middle| \vec{u}_n \right)}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$$AR = R\Lambda$$

از طرفی $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ وقتی $i \neq j$. در واقع داریم $u_j^t u_i = 0$ بنابراین

$$R^t R = \begin{pmatrix} u_1^t \\ \hline u_2^t \\ \hline \vdots \\ \hline u_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \vline & u_2 & \vline & \cdots & \vline & u_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^t u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2^t u_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & u_n^t u_n \end{pmatrix}$$

اگر $\vec{u}_i$ ها را با طول واحد در نظر بگیریم آنگاه ماتریس فوق همانی است. در نتیجه $R^{-1} = R^t$

$$\Longrightarrow \quad R^t A R = \Lambda$$

قضیه: اگر A ماتریس متقارن $n\times n$ باشد و $\vec{u_i}$ ها بردارهای ویژه متعامد یکه برای ماتریس A که ستونهای آن بردارهای ویژه u_i هستند، R^tAR یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر مقادیر ویژه A هستند.

مثال ۴: در ادامه مثال ۳ ماتریس A را قطری می‌کنیم: بردارهای ویژه A عبارتند از:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1/2\end{pmatrix} \;,\; \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}}_{v_1} , \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle$$

ابتدا یک پایه متعامد برای فضای بالا پیدا می‌کنیم:

$$v_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}^{v_2} = v_2 - \frac{v_1\cdot v_2}{\|v_1\|^2}\, v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4/5\\1\\2/5\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ سه بردار ویژه متناظر هستند.

اکنون این سه بردار را یکه می‌کنیم.

$$u_1 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad u_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2/3 & \sqrt{5}/5 & \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -2/3 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 1/3 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix} \qquad R^t A R = \begin{pmatrix} -9 & & 0 \\ & 9 & \\ 0 & & 9 \end{pmatrix}$$

شل ۵:

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy - 8xz + 8yz$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\vec{u} \Rightarrow Q = U^t (P^{-1})^t A P^{-1} U$$

$$Q = U^t \Lambda U \Leftarrow R^t A R = \Lambda \Leftarrow R = P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -9 & & 0 \\ & 9 & \\ 0 & & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$= -9X^2 + 9Y^2 + 9Z^2$$

که سطح تراز یک مخروط است.

سؤال: معادله $x^2+y^2+7z^2+16xy-8xz+8yz+x=0$ چه سطح درجه ۲ را در فضا ۳ نمایش می‌دهد؟

با توجه به محاسبات جلسه قبل به کمک تغییر متغیر $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ عبارت درجه ۲ فوق به صورت $9(-X^2+Y^2+Z^2)$ ساده می‌شود. بنابر شکل ۴ داریم:

$$x=\begin{pmatrix}2/3 & \sqrt{5}/5 & \frac{4\sqrt{5}}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\frac{2}{3}X+\frac{\sqrt{5}}{5}Y+\frac{4\sqrt{5}}{15}Z$$

بنابراین معادله بالا در دستگاه مختصات جدید به صورت زیر است:

$$-9X^2+9Y^2+9Z^2+\frac{2}{3}X+\frac{\sqrt{5}}{5}Y+\frac{4\sqrt{5}}{15}Z=0$$

که نمایش یک هذلولی‌گون است. (چرا؟) بررسی کنید که این نمایش هذلولی‌گون یک‌پارچه است یا دوپارچه؟

فرم درجه ۲

$$Q(x_1,\dots,x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots$$

$$= X^t A X$$

را در نظر بگیرید که A یک ماتریس $n \times n$ متقارن است با درایه‌های

$$A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$$

در واقع $a_{ij} = a_{ji}$. بنابر مباحث قبلی ماتریس R از بردارهای ویژه متعامد یکه A وجود دارد که

$$R^t A R = \Lambda$$

که Λ ماتریس قطری است و روی قطر آن مقادیر ویژه A ظاهر می‌شود. در نتیجه در مختصات جدید $Y = RX$

داریم:

$$Q = Y^t \Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

اگر $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ آنگاه همواره داریم $Q > 0$. در این حالت فرم درجه ۲ Q را معین مثبت می‌نامیم

تعریف: فرم درجه دو $Q(X)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i x_j$ ، را معین مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $0\neq X\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $Q(X)>0$.

آن را نیمه معین مثبت گوییم هرگاه $Q(X)\geq 0$ به ازای هر $X\in\mathbb{R}^n$.

به طور مشابه معین منفی و نیمه معین منفی تعریف می‌شود.

قضیه: اگر A ماتریس متقارن باشد و $Q(X)=X^tAX$ آنگاه:

(۱) اگر همه مقادیر ویژه A مثبت باشند، آنگاه Q معین مثبت است.

(۲) " " " " منفی " " " " معین منفی " .

(۳) " " " " نامنفی " " " " نیمه معین مثبت " " .

(۴) " " " " نامثبت " " " " نیمه معین منفی " " " .

قضیه ۸ صفحه ۴۷۹ کتاب را برای تعیین علامت مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن مطالعه کنید.

ریاضی عمومی ۲

جلسه نهم ۹۶/۱۲/۲۰

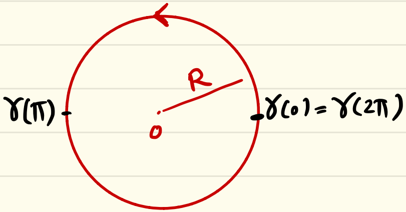
توابع برداری و منحنی‌ها

تابع برداری $\quad \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

تصویرِ γ در $\mathbb{R}^n$ را یکِ منحنی (خم) گوییم و تابع γ را پرمایشِ آن منحنی (خم) گوییم.

مثال:



$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

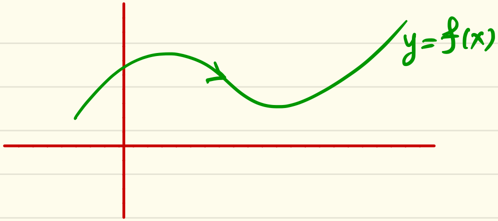
یک خم، پرمایشِ یکتا ندارد. مثلاً

$$\eta(\theta) = (R\sin 2\theta, R\cos 2\theta)$$

$$\eta : [\pi/4, \tfrac{5\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

یک پرمایشِ دیگر برای دایره است.

مثال ۲



$$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

نمودار این تابع یک منحنی است با پارامتر

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

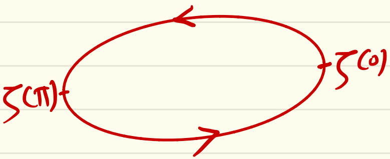
$$\gamma(t)=(t,f(t))$$

اگر بخواهیم جهت حرکت هم برعکس شود، پارامتر زیر را می‌توان در نظر گرفت

$$\eta:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\eta(t)=(a+b-t\,,\,f(a+b-t))$$

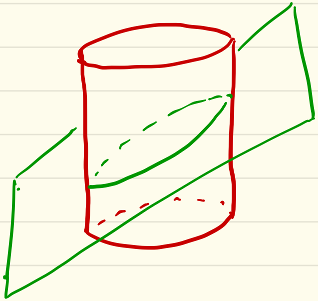
مثال ۳:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\zeta(\theta)=(a\cos\theta\,,\,b\sin\theta)\qquad \zeta:[0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

مثال ۴: استوانه با سطح مقطع بیضی با معادله $x^2+4y^2=4$ با صفحه $x+2y+4z=4$ قطع کنند.
یک پرمایش برای اشتراک این دو ارائه کنید.



$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (\underbrace{\gamma_1(t)}_{x}, \underbrace{\gamma_2(t)}_{y}, \underbrace{\gamma_3(t)}_{z})$$

$$x = 2\cos t \,,\quad y = \sin t \implies z = \frac{4 - 2\cos t - 2\sin t}{4}$$

$$\gamma(t) = \left(2\cos t, \sin t, 1 - \frac{\cos t + \sin t}{2}\right)$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

مثلاً فصل مشترک دو سطح درجه دو
$$\begin{cases} x^2+y+z=2 \\ xy+z=1 \end{cases}$$
یک خم است.

$$\Rightarrow \quad x^2+y-xy=1$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$$

$$\Rightarrow \quad z=1-xy=1-x(1+x)=1-x-x^2$$

$$\gamma(t)=(t,1+t,1-t+t^2) \qquad \gamma:(-\infty,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

در واقع هر مؤلفه $\gamma_i : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی است.

مفهوم حد، پیوستگی و مشتق γ_i در ریاضی ۱ دیده‌ایم. این تعاریف را می‌توان به راحتی به تابع برداری γ توسعه داد.

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \left(\lim_{t \to t_0} \gamma_1(t), \lim_{t \to t_0} \gamma_2(t), \dots, \lim_{t \to t_0} \gamma_n(t) \right)$$

همچنین تابع γ در نقطه t_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$$

و این معادل این است که همه مؤلفه‌های $\gamma_i(t)$ در نقطه t_0 پیوسته باشند.

تعریفِ مشتق :

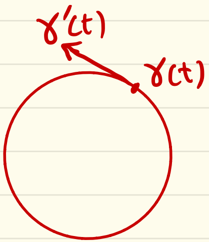
$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} = \left(\lim_{s\to t} \frac{\gamma_1(t)-\gamma_1(s)}{t-s}, \dots, \right)$$

اگر $\gamma(t)$ مختصات یکِ ذره را در $\mathbb{R}^n$ نشان دهد. $\gamma'(t)$ سرعت در لحظه t خواهد بود.

دقت کنید سرعت در اینجا یکِ بردار است. $|\gamma'(t)|$ را تندی (اندازه سرعت) گوییم.

به علاوه $\gamma'(t)$ همواره بر مسیرِ حرکت (منحنی γ) مماس است.

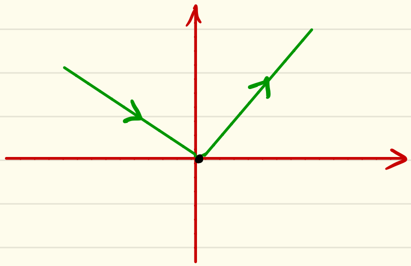


مثال:

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \leftarrow$$

سرعت $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

تندی $|\gamma'(t)| = R$



مثال ۷: منحنی

$$\gamma(t)=\begin{cases}(t,t) & t\geq 0\\ (t,-t) & t<0\end{cases}$$

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$

$$\gamma_1(t)=t$$

$$\gamma_2(t)=\begin{cases}t & t\geq 0\\ -t & t<0\end{cases}$$ $\longrightarrow$ γ_2 در $t=0$ مشتق‌پذیر نیست.

در نتیجه γ در $t=0$ مشتق‌پذیر نیست.

این منحنی را می‌توان با پارامتر

$$\eta(t)=\begin{cases}(t^2,t^2) & t\geq 0\\ (-t^2,t^2) & t<0\end{cases}$$

نوشت که η همه جا مشتق‌پذیر است.

$$\eta=(\eta_1,\eta_2)\quad,\ \eta_2(t)=t^2$$

$$\eta_1(t)=\begin{cases}t^2 & t\geq 0\\ -t^2 & t<0\end{cases}$$

η_1 و η_2 دو تابع مشتق‌پذیرند. دقت کنید $\eta'(0)=(0,0)$.

خواص مشتق :

1) $(\gamma+\eta)' = \gamma' + \eta'$

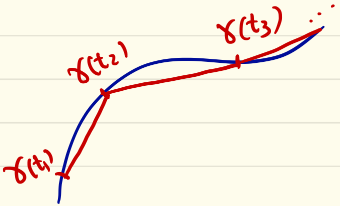
2) $(\gamma \cdot \eta)' = \gamma' \cdot \eta + \gamma \cdot \eta'$ ضرب داخلی

3) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f\gamma)' = f'\gamma + f\gamma'$ ضرب اسکالر

4) $(\gamma \times \eta)' = \gamma' \times \eta + \gamma \times \eta'$

5) $\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2 = 2\gamma' \cdot \gamma$

طول خم :



$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$$\text{طولش} \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right|$$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \left(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) \,,\, \gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) \,,\, \dots \right)$$

$$\approx \left(\gamma_1'(t_i^*) \cdot (t_i - t_{i-1}) \,,\, \gamma_2'(t_i^*) \, (t_i - t_{i-1}) \,,\, \dots \right)$$

$$\left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right| \approx (t_i - t_{i-1}) \left| \gamma'(t_i^*) \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right| \approx \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \left| \gamma'(t_i^*) \right| \approx \int_a^b \left| \gamma'(t) \right| dt$$

$$\text{طول خم} = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

مثال ۸: محیط دایره :

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\text{محیط} = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

نکته: طول خم مستقل از انتخاب پارامتریش برای خم است.

مثال ۹: محیط بیضی :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2t}\; dt \longrightarrow$$

نمی‌توان این انتگرال را برحسب فرمول صریح برای a و b نوشت.

مثال ۱۰: طول نمودار تابع مشتق‌پذیر $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$$

$$\text{طول نمودار} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

مثال ۱۱: طول منحنی مثال ۴:

$$\gamma(t) = \left(2\cos t, \sin t, 1-\frac{\cos t+\sin t}{2}\right)$$

$$|\gamma'(t)| = \left|\left(-2\sin t, \cos t, \frac{\sin t-\cos t}{2}\right)\right|$$

$$= \sqrt{4\sin^2 t+\cos^2 t+\frac{1}{4}(1-2\sin t\cos t)}$$

$$\text{طول منحنی} = \int_0^{2\pi} \sqrt{}\, dt$$

تعریف: (خم هموار) (1) پرمایش $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که γ مشتق‌پذیر است و γ' پیوسته است.

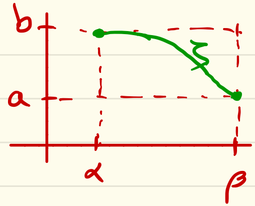
(2) $\gamma'(t) \neq 0$ به ازای هر $t \in I$.

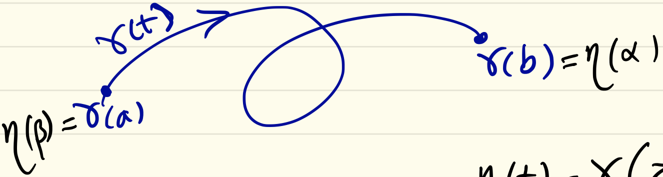
به عنوان مثال، خم شکل ۷ هر چند پرمایش مشتق‌پذیر دارد ولی $\gamma(0)=0$ که خاصیت ۲ را نقض می‌کند.

اگر $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک پرمایش برای یک خم هموار باشد، تابع $\varsigma: [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ را بازپرمایش این خم گوییم هرگاه ς مشتق‌پذیر و یک به یک و پوشا باشد. در واقع همیشه $\varsigma' > 0$ یا همیشه $\varsigma' < 0$. در حقیقت $\eta = \gamma \circ \varsigma: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ یک پرمایش جدید برای خم است.

اگر $\varsigma' > 0$ آن را بازپرمایش جهت‌نگهدار گوییم در غیر این صورت آن را جهت‌برگردان گوییم.

$$\zeta'<0 \Rightarrow \zeta(\alpha)=b,\ \zeta(\beta)=a$$





$$\eta(t)=\gamma(\zeta(t)) : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

در این حالت η مسیر عکس γ را طی می‌کند. لذا آن را جهت برگردان گوییم.

درحالی که $\zeta'>0$ باید $\zeta(\alpha)=a$ ، $\zeta(\beta)=b$ و مسیر حرکت

$$\eta(t)=\gamma(\zeta(t)) : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

با مسیر حرکت γ یکی است و آن را جهت نگهدار گوییم. هرچند مسیر حرکت یکی است ولی سرعت حرکت متفاوت است.

$$\eta(t)=(\gamma_1(\zeta(t)),\gamma_2(\zeta(t)),\dots)$$

$$\eta'(t)=\zeta'(t)\,\gamma'(t)$$ ($\zeta'(t)$ یک عدد حقیقی است و این ضرب اسکالر است)

مثال ۱۲: دو پرمایش در شکل ۱ را در نظر بگیرید:

$$\gamma(t) = (R\cos t,\ R\sin t)$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \zeta & & \\ [\pi/4,\ 5\pi/4] & & \end{array}$$

$$\eta(\theta) = (R\sin 2\theta,\ R\cos 2\theta)$$

$$\eta : [\pi/4,\ \tfrac{5\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

تابع ζ با ضابطه $\zeta(\theta) = 2\pi + \pi/2 - 2\theta$ یک بازپرمایش است که η را از روی γ می‌سازد.

$$\eta(\theta) = \gamma(\zeta(\theta)) = \left(R\cos(2\pi + \pi/2 - 2\theta),\ R\sin(2\pi + \pi/2 - 2\theta)\right)$$

$$= (R\sin 2\theta,\ R\cos 2\theta)$$

این بازپرمایش جهت برگردان است.

نکته: طول خم تحت بازپارامتری تغییر نمی‌کند.

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \varsigma \big\uparrow & & \\ [\alpha,\beta] & & \end{array}$$

$$\eta = \gamma \circ \varsigma$$

$$\text{طول خم} = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

از طرف دیگر برحسب پارامتر η طول خم با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_\alpha^\beta |\eta'(\theta)|\, d\theta$$

اگر در انتگرال اول تغییر متغیر $t = \varsigma(\theta)$ را قرار دهیم با فرمول تغییر متغیر در انتگرال داریم: (با فرض $\varsigma' > 0$)

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\gamma'(\varsigma(\theta))|\, \varsigma'(\theta)\, d\theta$$

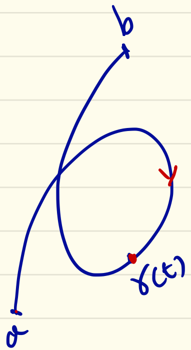
با توجه به رابطه $\eta'(\theta) = \varsigma'(\theta)\, \gamma'(\varsigma(\theta))$ به انتگرال دومی می‌رسیم.

ریاضی عمومی ۲

جلسه دهم ۹۶/۱۲/۲۲

پیمایش برحسب طول :

$$\gamma : I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



طول سیرِ طی شده از نقطه a تا t : $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\theta)|\, d\theta$

$$s : [a,b] \longrightarrow [0,\ell]$$

$$s'(t) = |\gamma'(t)| > 0 \Longrightarrow$$ s تابع صعودی است

یک به یک و وارون پذیر

$$\begin{tikzcd}
t = s^{-1} : [0,\ell] \arrow[r] \arrow[dr, "\tilde{\gamma}(s)"'] & {[a,b]} \arrow[d, "\gamma(t)"] \\
 & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1} \Longrightarrow \tilde{\gamma} \circ s = \gamma$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|}$$

برای سادگی همیشه قرار می‌دهیم $\bar{\gamma}(s)=\gamma(s)$.

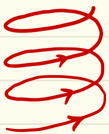
$$\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\frac{d\gamma}{dt}}{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|} \Rightarrow \left|\frac{d\gamma}{ds}\right|=1$$

مثال ۱ دایره به شعاع R با پارامتر $\gamma(t)=(R\cos t, R\sin t)$

$$s(t)=\int_0^t |\gamma'(\theta)|\,d\theta = Rt \Rightarrow t=\frac{s}{R}$$

$$\gamma(s)=\left(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right)$$

مثال ۲ (مارپیچ دایره‌وار)



$$\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$$

$$s=\int_0^t |r'(\theta)|\,d\theta=\int_0^t \left|(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\right|d\theta = t\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

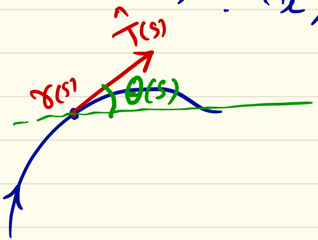
تذکر: اگر برای محاسبه پارامتری بر حسب طول یک خم از هر پارامتری بخواهیم شروع کنیم نتیجه نهایی به عنوان پارامتری بر حسب طول یکتا است.

تعریف: همانطور که دیدیم اگر $\gamma(s)$ پارامتری بر حسب طول باشد، $\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$. قرار می‌دهیم:

$$\hat{T}(s) := \frac{d\gamma}{ds}$$

و آن را بردار مماس یکه می‌نامیم.

تعریف: (انحناء) اگر γ یک خم در صفحه باشد، و θ زاویه بین بردار مماس $\hat{T}$ و محور xها باشد



میزان تغییرات θ مقدار چرخش بردار مماس $\hat{T}$ را بیان می‌کند یا به عبارتی مقدار خمیدگی γ را. در واقع $\frac{d\theta}{ds}$ را انحناء یک خم تعریف می‌کنیم.

$$\hat{T}(s) = (\cos\theta \, , \, \sin\theta) \implies \frac{d\hat{T}}{ds} = \left(-\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \, , \, \cos\theta \, \frac{d\theta}{ds}\right) \quad (1)$$

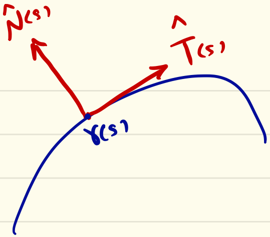
انحنای خم :
$$\boxed{K(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|}$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$(2) \qquad \hat{N}(s) = (-\sin\theta \, , \, \cos\theta)$$

این بردار $\hat{N}$ که به آن بردار قائم یکه گوییم دوران $\frac{\pi}{2}$ بردار مماس $\hat{T}(s)$ است.

به وضوح $\hat{T}$ و $\hat{N}$ دو بردار یکه متعامد هستند. در واقع $(\hat{T}, \hat{N})$ پایه متعامد یکه را تشکیل
برای صفحه هستند. درحقیقت $(\hat{T}(s), \hat{N}(s))$ یک کنج متحرک روی خم γ هستند. یعنی
در هر نقطه $\gamma(s)$ یک پایه متعامد برای صفحه داریم.



$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{T}}{ds} = \kappa(s)\,\hat{N}(s) \\[2ex] \dfrac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa(s)\,\hat{T}(s) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ از (۱)

$\Leftarrow$ اگر از (۲) مشتق بگیریم

برای به دست آوردن رابطه دوم میتوان به این طریق عمل کرد. $\dfrac{d\hat{N}}{ds}$ را به عنوان یک بردار در R^2 میتوان مختصات آن را در پایه $(\hat{T}, \hat{N})$ نوشت

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = a\hat{T} + b\hat{N}$$

$$(a\hat{T} + b\hat{N})\cdot\hat{N} = 0 \Leftarrow \frac{d\hat{N}}{ds}\cdot\hat{N} = 0 \Leftarrow |\hat{N}(s)|^2 = 1$$ از طرفی

$$\Downarrow$$

$$b = 0$$

$$\frac{d\hat{N}}{ds}\cdot\hat{T} + \hat{N}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \Leftarrow \hat{N}(s)\cdot\hat{T}(s) = 0$$ همچنین

$$\Rightarrow (a\hat{T}\cdot\hat{T}) + \hat{N}\cdot(\kappa\hat{N}) = 0 \Rightarrow a = -\kappa$$

مثال ۳: (انحنای دایره به شعاع R) بنا بر مثال ۱ پارامتریش برحسب طول دایره به شکل زیر است:

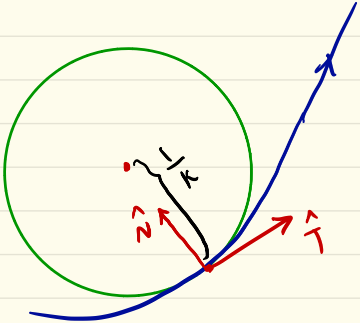
$$\gamma(s) = \left(R\cos\frac{s}{R} \,,\, R\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{T}(s) = \left(-\sin\frac{s}{R} \,,\, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{s}{R} \,,\, \sin\frac{s}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{R} \quad , \quad \hat{N}(s) = -\left(\cos\frac{s}{R} \,,\, \sin\frac{s}{R}\right)$$

تعریف: مقدار $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ را **شعاع انحنا** می‌نامیم. دایره با شعاع $\rho(s)$ که در نقطه $\gamma(s)$ بر خم مماس است و مرکز آن در راستای بردار قائم $\hat{N}(s)$ قرار دارد را **دایره بوسان** می‌نامیم.



تمرین : $\gamma_c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \hat{N}(s)$

رابطه بالا خم بدست آمده از مرکز دایره‌ی بوسان خم γ است.

انحنای خم جدید را محاسبه کنید.

فرمول انحنا برحسب t :

$$\hat{T} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\frac{d\gamma}{dt}}{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|}$$

اگر $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$, $\gamma'' = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$ آنگاه

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{\gamma''|\gamma'| - \gamma' \frac{d}{dt}|\gamma'|}{|\gamma'|^2}$$

$$|\gamma'|^2 = \gamma' \cdot \gamma' \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2|\gamma'| \frac{d}{dt}|\gamma'| = 2\frac{d\gamma'}{dt} \cdot \gamma'$$

$$\Rightarrow \frac{d|\gamma'|}{dt} = \frac{\gamma'' \cdot \gamma'}{|\gamma'|}$$

$$\kappa = \frac{\left| \gamma'' |\gamma'|^2 - \gamma'(\gamma'' \cdot \gamma') \right|}{|\gamma'|^3}$$

مثال ۴: انحنای بیضی.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \gamma(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$$

$$\gamma' = (-a\sin t,\ b\cos t) \qquad |\gamma'| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$\gamma'' = (-a\cos t,\ -b\sin t)$$

مختصات شتاب در کنج $(\hat{T}, \hat{N})$.

مکان $= \gamma(t)$

سرعت $= \dfrac{d\gamma}{dt}$, شتاب $= \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}$

$$a(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \alpha \hat{T} + \beta \hat{N}$$

$\alpha \downarrow$ شتاب مماسی

$\beta \downarrow$ مؤلفه عمودی شتاب یا گریز از مرکز

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\hat{T}(s) \frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\hat{T}(s) \frac{ds}{dt}\right) \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \hat{T}(s) + \underbrace{\frac{d}{ds}\hat{T}(s)}_{K\hat{N}(s)} \frac{ds}{dt}\right) \frac{ds}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt}\right) \hat{T}(s) + k(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{N}(s)$$

مؤلفه مماسی شتاب $= \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{ds}{dt}$

مؤلفه عمودی شتاب $= K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

دقت کنید $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$ تندی سرعت است بنابراین اگر در طول مسیر حرکت تندی مقدار ثابتی باشد

$\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ است و مؤلفه مماسی شتاب صفر خواهد بود. لذا در طول مسیر حرکت نیرو در راستای $\hat{N}$

و عمود بر مسیر حرکت خواهد بود. شکل ۳ ص ۵۱۱ کتاب را مطالعه کنید.

قضیه اساسی خم‌ها: اگر $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ دو خم هموار

پارامتریزه شده برحسب طول باشند که انحنای این دو خم در هم نقاط برابر است. آنگاه با یک انتقال

و دوران تصویر این دو خم بر هم منطبق است.

اثبات: $(\hat{T}_\gamma, \hat{N}_\gamma)$ کنج متحرک خم γ و $(\hat{T}_\eta, \hat{N}_\eta)$ کنج متحرک خم η.

با یک انتقال و دوران می‌توان فرض کرد که در نقطه شروع $s=0$ این دو کنج بر هم منطبق هستند.

$$\varphi(s) := \hat{T}_\gamma \cdot \hat{T}_\eta + \hat{N}_\gamma \cdot \hat{N}_\eta$$

$$\varphi'(s) = k\hat{N}_\gamma \cdot \hat{T}_\eta + \hat{T}_\gamma \cdot k\hat{N}_\eta - k\hat{T}_\gamma \cdot \hat{N}_\eta - \hat{N}_\gamma \cdot k\hat{T}_\eta = 0$$

$$\hat{T}_\gamma(0) = \hat{T}_\eta(0) \ , \ \hat{N}_\gamma(0) = \hat{N}_\eta(0) \implies \varphi(0) = 2$$

$$\implies \varphi(s) = 2$$ به ازای همه مقادیر s

از طرفی بنابر نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\hat{T}_\gamma \cdot \hat{T}_\eta \leq |\hat{T}_\gamma||\hat{T}_\eta| = 1$$

$$\hat{N}_\gamma \cdot \hat{N}_\eta \leq |\hat{N}_\gamma||\hat{N}_\eta| = 1 \implies \varphi(s) \leq 2$$

بنابراین حالت تساوی کوشی شوارتز در همه نقاط اتفاق می‌افتد یعنی $\hat{T}_\eta$ و $\hat{T}_\gamma$ هم‌راستا هستند و همینطور $\hat{N}_\eta$ و $\hat{N}_\gamma$. و چون طول این بردارها یک است بنابراین

$$\hat{T}_\gamma(s) = \hat{T}_\eta(s) \quad , \quad \hat{N}_\gamma(s) = \hat{N}_\eta(s)$$

از طرفی داریم

$$\frac{d\gamma}{ds} = \hat{T}_\gamma(s) \quad , \quad \frac{d\eta}{ds} = \hat{T}_\eta(s)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{d}{ds}(\gamma - \eta) = 0 \\ \gamma(0) = \eta(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(s) = \eta(s)$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه یازده ۹۶/۱۲/۲۷

خمهای در $\mathbb{R}^3$:

فرض کنید $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک خم هموار پارامتری شده برحسب طول باشد.

بردار مماس $\hat{T}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}$ که $|\hat{T}(s)| = 1$.

تعریف انحنا : $\kappa(s) = \left| \dfrac{d\hat{T}}{ds} \right|$

بردار قائم : $\hat{N}(s) := \dfrac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\kappa(s)}$

بردار قائم دوم : $\hat{B}(s) := \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$

ضرب خارجی

سه بردار $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ یک پایه متعامد یکه راستگرد است.

یعنی $\det(\hat{T}|\hat{N}|\hat{B}) = +1$.

معادلات فرنه - سره (Frenet-Serret)

چون $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ پایه است همیشه می‌توان $\frac{dT}{ds}$ ، $\frac{dN}{ds}$ و $\frac{dB}{ds}$ را برحسب ترکیب خطی این پایه نوشت.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\hat{T}}{ds} = a_{11}\,\hat{T} + a_{12}\,\hat{N} + a_{13}\,\hat{B} \\[2ex]
\dfrac{d\hat{N}}{ds} = a_{21}\,\hat{T} + a_{22}\,\hat{N} + a_{23}\,\hat{B} \\[2ex]
\dfrac{d\hat{B}}{ds} = a_{31}\,\hat{T} + a_{32}\,\hat{N} + a_{33}\,\hat{B}
\end{cases}
$$

سوال: ضرایب a_{ij} چگونه به دست می‌آیند؟

بنابه تعریف بردار قائم $\hat{N}$ ضرایب سطر اول به سادگی به دست می‌آیند $a_{11} = a_{13} = 0 \quad , a_{12} = k$

$$|\hat{T}| = |\hat{N}| = |\hat{B}| = 1 \Rightarrow \hat{T}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = \hat{N}\cdot\frac{d\hat{N}}{ds} = \hat{B}\cdot\frac{d\hat{B}}{ds} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$$

$$\hat{T}\cdot\hat{N} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\hat{N} + \hat{T}\cdot\frac{d\hat{N}}{ds} = 0 \Rightarrow a_{12} + a_{21} = 0$$

$$\hat{T}\cdot\hat{B} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\hat{B} + \hat{T}\cdot\frac{d\hat{B}}{ds} = 0 \Rightarrow a_{13} + a_{31} = 0$$

$$\hat{N}\cdot\hat{B}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\hat{N}}{ds}\cdot\hat{B}+\hat{N}\cdot\frac{d\hat{B}}{ds}=0 \quad\Longrightarrow\quad a_{23}+a_{32}=0$$

$$\Longrightarrow\quad a_{31}=0\ ,\quad a_{21}=-\kappa$$

قرار دهید $\quad a_{23}=\tau$

تعریف- مقدار τ در معادله فوق را تاب خم گوییم.

$$\begin{cases}\dfrac{d\hat{T}}{ds}=\kappa\hat{N}\\[2mm] \dfrac{d\hat{N}}{ds}=-\kappa\hat{T}+\tau\hat{B}\\[2mm] \dfrac{d\hat{B}}{ds}=-\tau\hat{N}\end{cases}$$

مثال - مارپیچ

با فرض $a>0$ ، $\gamma(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$

بنابر مثال ۲ جلسه قبل پارامتریش برحسب طول این خم عبارتست از

$$\gamma(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\hat{T}(s)=\frac{d\gamma}{ds}=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$K(s)=\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|=\left|\left(\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)\right|$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\hat{N}(s)=\frac{1}{K}\frac{dT}{ds}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$$

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{N}}{ds} \times \hat{T} = \tau\hat{B}\times\hat{T} = \tau\hat{N}$$

$$\tau = \left|\frac{d\hat{N}}{ds} \times \hat{T}\right|$$

$$\tau = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right) \times \hat{T}(s)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)\right|$$

$$= \frac{|b|}{a^2+b^2}$$

نکته: تاب میزان خروج از حالت مسطح را نشان میدهد.

گزاره: $\tau=0$ اگر و تنها اگر تصویر خم در یک صفحه قرار دارد.

اثبات ـ اگر خم مسطح باشد، به وضوح بردارهای $\hat{T}(s)$ و $\frac{d\hat{T}}{ds}$ داخل آن صفحه قرار دارند یعنی خم در صفحه $(\hat{T},\hat{N})$ قرار می‌گیرد.

و در نتیجه $\hat{B}$ بردار عمود صفحه خواهد بود و یک بردار ثابت است. بنابراین

$$\frac{d\hat{B}}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \tau=0$$

برعکس اگر $\tau=0 \Leftarrow \frac{dB}{ds}=0 \Leftarrow B$ بردار ثابت است.

معادله صفحه‌ای که از نقطه $\gamma(0)$ می‌گذرد و $\hat{B}$ بردار قائم آن باشد عبارت است از $(X-\gamma(0))\cdot\hat{B}=0$

نشان می‌دهیم $\gamma(s)$ در این معادله صدق می‌کند. قرار دهید $f(s)=(\gamma(s)-\gamma(0))\cdot\hat{B}$

$$f(0)=0,\quad f'(s)=\frac{d\gamma}{ds}\cdot\hat{B}=\hat{T}(s)\cdot\hat{B}=0 \quad \Rightarrow f(s)\equiv 0$$

قضیه اساسی خم‌ها: اگر γ_1 و γ_2 دو خم باشند که انحنا و تاب هر دو برابر باشند. آنگاه با یک حرکت صلب (انتقال و دوران) می‌توان این دو خم را بر هم منطبق کرد.

اثبات - فرض کنید (T_1, N_1, B_1) و (T_2, N_2, B_2) کنج‌های فرنه این دو خم باشند. ابتدا با یک حرکت صلب فرض می‌کنیم که

$T_1(0) = T_2(0)$ ، $N_1(0) = N_2(0)$ و $B_1(0) = B_2(0)$.

قرار دهید $\varphi(s) = T_1 \cdot T_2 + N_1 \cdot N_2 + B_1 \cdot B_2$ به راحتی می‌توان دید که $\varphi'(s) = 0$

از طرفی بنابر فرض بالا $\varphi(0) = 3$. و بنابر نامساوی کوشی-شوارتز

$$\varphi(s) \leq |T_1| \cdot |T_2| + |N_1| \cdot |N_2| + |B_1| \cdot |B_2| = 3$$

و بنابر حالت تساوی کوشی شوارتز اتفاق بیفتد و بردارهای (T_1, T_2) ، (N_1, N_2) و (B_1, B_2) هم‌راستا باشند.

$$\Longrightarrow T_1 = T_2 \,,\; N_1 = N_2 \,,\; B_1 = B_2 \Longrightarrow \frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{d\gamma_2}{ds} \Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

محاسبه انحنا و تاب جب زمان :

$$\gamma : I \longrightarrow R^3$$

$$\vec{V} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \hat{T}$$

$$\boxed{v(t) = |\gamma'(t)|}$$

$$\boxed{\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + v(t) \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \hat{T} + (v(t))^2 \kappa \hat{N}$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = v^3 \kappa \hat{B} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = \frac{\vec{V} \times \vec{a}}{|\vec{V} \times \vec{a}|}}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{v^3}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \kappa \hat{N} \Rightarrow \boxed{\hat{N} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}}$$

یا

$$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = \frac{(\vec{V} \times \vec{a}) \times \vec{V}}{|\vec{V} \times \vec{a}| \cdot |\vec{V}|}$$

$$\tau = \frac{dN}{ds}\cdot B = v(t)\,\frac{dN}{dt}\cdot B$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = v''\,\hat{T} + v'\,\underbrace{\frac{d\hat{T}}{dt}}_{v\kappa\hat{N}} + (v^2\kappa)'\,\hat{N} + v^2\kappa\,\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{v(-\kappa T+\tau B)}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\hat{B} = v^3\kappa\,\tau \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\tau = \frac{\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}}$$

مثال _ $\gamma(t)=\left(t+\cos t,\ t-\cos t,\ \sqrt{2}\sin t\right)$ کنج فرنه، انحناء و تاب را حساب کنید.

$$\vec{v} = \frac{d\gamma}{dt} = (1-\sin t,\ 1+\sin t,\ \cos t) \quad\Longrightarrow\quad v(t) = |\vec{v}| = \sqrt{3+\sin^2 t}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = (1-\cos t,\ 1+\cos t,\ -\sin t)$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{3+\sin^2 t}}\left(1-\sin t,\ 1+\sin t,\ \cos t\right)$$

$$\vec{V}\times\vec{a} = \left(-1-\sin t-\cos t,\ -1+\sin t+\cos t,\ 2(\cos t-\sin t)\right)$$

$$|\vec{V}\times\vec{a}| = \left[(\sin t+\cos t)^2+1+4(\cos t-\sin t)^2\right]^{1/2} = \left(6-6\sin t\cos t\right)^{1/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{V}\times\vec{a}}{|\vec{V}\times\vec{a}|} \cdot \qquad \kappa = \frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{v^3}$$

$$\vec{N} = \vec{B}\times\vec{T} = \frac{(\vec{V}\times\vec{a})\times\vec{V}}{|(\vec{V}\times\vec{a})\times\vec{V}|} = \cdots$$

$$\tau = \frac{(V\times a)\cdot\frac{da}{dt}}{|v\times a|^2} \qquad \frac{da}{dt} = (\sin t,\ -\sin t,\ -\cos t) \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{-(1+\sin t+\cos t)\sin t - \sin t(-1+\sin t+\cos t) - 2\cos t(\cos t-\sin t)}{6-6\sin t\cos t} = \frac{-1-\cos^2 t+\sin t\cos t}{6-6\sin t\cos t}$$

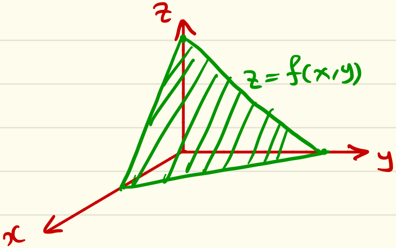
ریاضی عمومی ۲

جلسه دوازده ۹۷/۱/۱۹

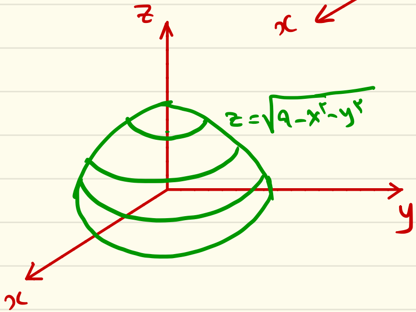
توابع چند متغیره .

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

نمایش تصویری : ۱ نمودار $n=1,2$, $m=1$



مثال- $f(x,y)=3-2x-y$



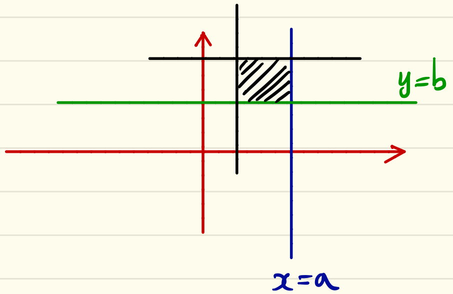
مثال- $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

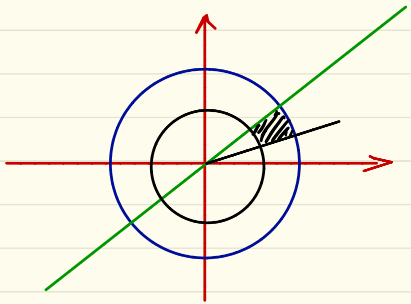
f دامنه $=\{(x,y) : x^2+y^2 \le 9\}$

۲) تصویرِ تابع روی مجموعه‌های خاص .

مثال - تصویرِ تابع روی جمهای درداشته

$$f(x,y) = (x\cos y \,,\, x\sin y)$$





تصویرِ خط $x=a$ دایره‌ی به شعاع $|a|$.

تصویرِ خط $y=b$ ، خط گذرا از مبدأ است با شیبِ $\tan(b)$.

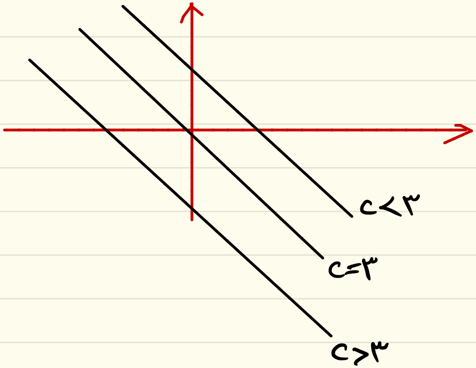
۳) مجموعه های تراز: اگر $f: U\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تعریف شده باشد به ازای هر مقدار $c\in \mathbb{R}^m$

مجموعه $f^{-1}(c)=\{x\in U : f(x)=c\}$ سطح تراز متناظر با مقدار c می‌نامیم.

این روش به خصوص وقتی $m=1$ است کاربرد فراوان دارد.

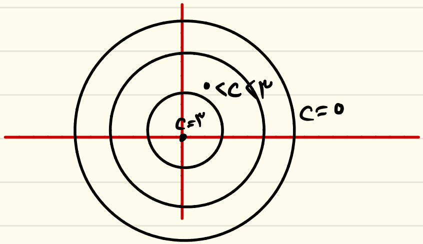
مثال: $f(x,y)=3-2x-y$

$$3-2x-y=c$$

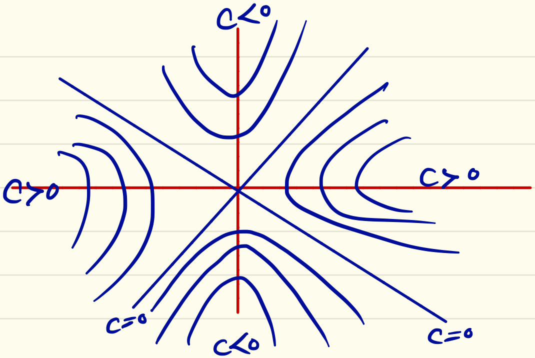


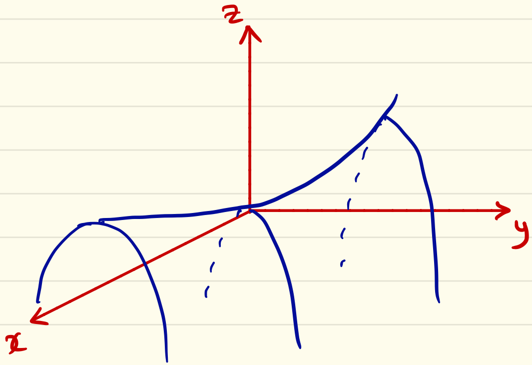
مثال: $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$$\sqrt{9-x^2-y^2}=c$$



شکل - $f(x,y) = x^2 - y^2$





حد و پیوستگی :

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ باشند فاصله x تا y برابر است با $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$

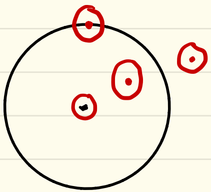
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

تعریف : نقطه a را نقطه حدی مجموعه U گوییم هرگاه در نزدیکی a (در هر همسایگی نقطه a) نقاطی از مجموعه U وجود داشته باشند.

یعنی به ازای هر $0<r$ اگر قرار دهیم $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$ ← توپ به شعاع r به مرکز a

آنگاه
$$\left(B_r(a) - \{a\}\right) \cap U \neq \emptyset$$

مثال : $U = \{x : 0 < |x| < 1\}$



نقاط حدی U عبارتند از همه نقاط $\{x : |x| \leq 1\}$.

تعریف حد: نقطه a را یک نقطه حدی U در نظر بگیرید. گوییم تابع f در نقطه حد دارد و حد آن برابر با L است

و می‌نویسیم $\lim_{x \to a} f(x) = L$ هرگاه به ازای هر تقریب از a مقدار f نزدیک L باشد یعنی

به ازای هر خطای $e > 0$ برای محاسبه L بتوانیم مقدار $\delta > 0$ را پیدا کنیم که

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < e$$

در واقع خاصیت حد یک کنترل در محاسبه مقدار f در نزدیکی a است.

مثال: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ که در دایره به شعاع یک تعریف شده است.

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y) = 0$$

برای اثبات این مطلب باید به ازای هر خطای e یک همسایگی از نقطه $(1,0)$ پیدا کنیم که مقدار f در این همسایگی از e کمتر باشد.

$$|(x-1,y)| < \delta \implies \sqrt{1-x^2-y^2} < e$$

$$|(x-1,y)| < \delta \Rightarrow (x-1)^2+y^2 < \delta^2 \Rightarrow |1-x| < \delta \Rightarrow 1-\delta < x \le 1$$

مقادیر $x>1$ در دامنه‌ی تابع نیستند.

$$1-x^2-y^2 < 1-(1-\delta)^2-y^2 \le 1-(1-\delta)^2 = e^2$$

$\delta = 1-\sqrt{1-e^2}$ کافی است به ازای هر $0<e\le 1$

نکته- مشابه حالت یک متغیره خواص حد برقرار است یعنی

1) $$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

2) $$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

3) $$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

4) $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y)$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

مثال: $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ دامنه تابع همه نقاط صفحه است به جز از مبدأ.

تابع f در مبدأ حد ندارد. زیرا اگر وجود داشته باشد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$

آنگاه به ازای هر $e>0$ باید همسایگی از مبدأ داشته باشیم که مقدار f در آن همسایگی در بازه $(L-e,L+e)$ باشد. حال اگر مقدار f را روی خطوط $y=mx$ نگاه کنیم داریم:

$$f(x,mx)=\frac{2m}{m^2+1}$$

چون در هر همسایگی مبدأ نقاطی از خط $y=mx$ قرار دارد نتیجه می‌شود که باید هم تعداد $\frac{2m}{m^2+1}$ در بازه $(L-e,L+e)$ قرار داشته باشد. اگر $e<\frac{1}{2}$ انتخاب کنیم برای $m=0$ و $m=1$ به تناقض می‌رسیم.

مثال: $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \Rightarrow f(x,y)=r\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\lim_{r\to 0} f(x,y)=0$$

$$|\sqrt{x^2+y^2}|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)|=|r\cos^2\theta\sin\theta|\le r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

به ازای هر خطای محاسبه e بایدِ $\delta=e$ قرار دهیم.

مثال: $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ مقدار این تابع روی هر خط $y=mx$ برابر است با

$$f(x,mx)=\frac{2mx}{x^2+m^2}$$

که وقتی $x\to 0$ مقدار تابع به صفر میل می‌کند. ولی این تابع در صفحه در نقطه مبدأ حد ندارد.

زیرا اگر مقدار تابع را روی منحنی $y=mx^2$ نگاه کنیم برابر است با $\dfrac{2m}{m^2+1}$ که نشان دهد حتی مبدأ تابع نوسانات زیاد دارد.

<u>تعریف پیوستگی</u> : تابع f را در نقطه a پیوسته گوییم هرگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

یعنی باید (۱) a در دامنه تعریف f باشد،

(۲) حد $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

(۳) رابطه مساوی بالا برقرار باشد.

خاصیت پیوستگی یعنی اینکه برای محاسبه $f(a)$ اگر بخواهیم خطای محاسبه از $e > 0$ کمتر باشد همواره می‌توانیم یک همسایگی از a انتخاب کنیم که در آن همسایگی خطا کنترل شده و مقدار آن از e کمتر است.

مثل: $f(x_1,\dots,x_n)=a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_n$ در مبدأ پیوسته است.

$$f(0,\dots,0)=a_0$$

$$|(x_1,\dots,x_n)|<\delta \Longrightarrow x_1^2+\dots+x_n^2<\delta^2 \Longrightarrow x_i^2<\delta^2$$

$$\Longrightarrow |a_ix_i|<\delta|a_i|$$

$$\Longrightarrow |f(x_1,\dots,x_n)-f(0,\dots,0)|=|a_1x_1+\dots+a_nx_n|$$

$$\leq |a_1x_1|+\dots+|a_nx_n|$$

$$\leq \delta\big(|a_1|+\dots+|a_n|\big)=\epsilon$$

مثل: $f(x,y) = xy$ $\qquad f(1.01,\ 0.99) = ?$

سؤال: برای تقریب $1 \approx 0.99 \times 1.01$ یک کران بالا برای خطای محاسبه پیدا کنیم؟

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 1 \implies$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 < \delta^2 \implies |xy-1| < e$$

$$|xy-1| = |(x-1)y + y - 1| \le |x-1| \cdot |y| + |y-1|$$

$$\le \delta \cdot (1+\delta) + \delta < 3\delta = e$$

$$\delta = 0.01 \implies |xy-1| < 3 \times 0.01 \implies 0.97 < 1.01 \times 0.99 < 1.03$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه سیزده ۹۷/۱/۲۱

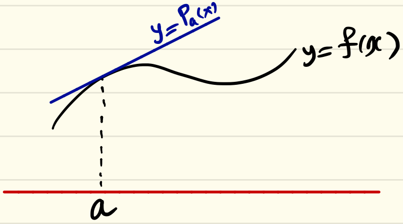
مشتق:

یادآوری از مفهوم مشتق توابع یک متغیره

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تقریب خطی درجه یک حول نقطه a $\longleftarrow$ $$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a) = P_a(x)$$



خط با شیب $f'(a)$ که از نقطه $(a, f(a))$ می‌گذرد

بر نمودار تابع مماس است.

مشتق جهت‌دار : $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$

راستای u را در نظر بگیرید و خط گذرا از نقطه a در راستای u که نقاط آن با ضابطه $a + t\vec{u}$ بدست می‌آید. اگر f را به این خط محدود کنیم یک تابع تک متغیره داریم و موضوع مشتق قابل تعریف است که به آن مشتق در راستای u گفته می‌شود.

$$g(t) := f(a + t\vec{u}) \quad : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_u f(a) := g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{u}) - f(a)}{h}$$

تقریب خطی در راستای u :

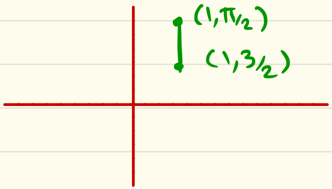
$$f(a + h\vec{u}) \approx f(a) + h\, D_u f(a)$$

مثال:

$$f(x,y) = x^2 \sin y$$

$$f(1, 3/2) = ?$$

$$f(1, \pi/2) = 1$$



باید مشتق را در راستای $e_2=(0,1)$ محاسبه کنیم.

$$f(1, 3/2) \approx f(1, \pi/2) + (3/2 - \pi/2) \cdot D_{e_2} f(1, \pi/2)$$

$$(1, 3/2) = (1, \pi/2) + \underbrace{(3/2 - \pi/2)}_{h} e_2$$

$$D_{e_2} f(1, \pi/2) = \lim_{h \to 0} \frac{f((1,\pi/2) + h e_2) - f(1, \pi/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1, \pi/2 + h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\pi/2 + h) - 1}{h} = 0$$

مشتق جزئی: اگر $e_i=(0,\dots,1,0,\dots,0)$ (i-ام) ، آنگاه $D_{e_i}f(a)$ را مشتق جزئی f در نقطه a گوییم که با نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{x_i} f(a)$$

مثال: $f(x,y) = x^2 \sin y$

برای محاسبه $\partial_x f$ باید مشتق جهتی در راستای e_1 را حساب کرد و این بدان معنی است که بقیه متغیرها را ثابت فرض کنیم و نسبت به x مشتق بگیریم.

$$\partial_x f = 2x \sin y \qquad \partial_y f = x^2 \cos y$$

مثال:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\partial_x f$, $\partial_y f$ را حساب کنید.

اگر $x^2+y^2\neq 0$

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\partial_y f = ?$$

تعریف خطی تابع به یک مشتق:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

A یک ماتریس $m\times n$ است.

$$f(x)\approx f(a)+A(x-a)$$

تعریف: تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است هرگاه ماتریس A وجود داشته باشد که

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{|x-a|}=0$$

روش محاسبه ماتریس مشتق:

حد عبارت قبل را در راستای e_i در نظر بگیرید. داریم:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_i)-f(a)-A(he_i)}{|h|}=0$$

برای مقادیر مثبت h داریم:

$$Ae_i=\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}$$

اگر $f=(f_1,\dots,f_m)$، در واقع عبارت بالا نتیجه می‌دهد که

$$\text{ستون } i\text{-ام ماتریس } A = \begin{bmatrix} \partial_i f_1(a) \\ \partial_i f_2(a) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(a) \end{bmatrix}$$

درایه (j,i)-ام ماتریس A برابر است با $\partial_i f_j(a)$. (سطر j-ام، ستون i-ام)

<u>جمع‌بندی</u>: ماتریسِ مشتق تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطه a را با $Df(a)$ نشان می‌دهیم

اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه همه مشتق‌های جزئی وجود دارند و

$$Df(a) = \left[\partial_j f_i(a)\right]$$

این ماتریس را <u>ماتریس ژاکوبی</u> تابع f می‌نامند.

<u>نکته</u>: ممکن است تابع f در همه راستاها مشتق‌پذیر باشد و ماتریس ژاکوبی محاسبه شود. اما با این وجود لزومی ندارد که تابع f مشتق‌پذیر باشد.

<u>مثال</u>:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

در مثال قبل دیدیم که $\partial_2 f(0,0) = \partial_1 f(0,0) = 0$

اگر قرار باشد که تابع f در نقطه $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، باید $Df(0,0)=[0,0]$ و حد زیر برقرار باشد.

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-Df(0,0)\cdot x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\rightarrow$ این حد وجود ندارد.

قضیه : اگر همه توابع $\partial_i f$ حول نقطه a وجود داشته باشند و در نقطه a پیوسته باشند، آنگاه تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است.

مثال - در مثال قبل هر چند $\partial_i f$ در همه جا تعریف شده‌اند اما در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیستند.

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

گزاره : اگر تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$D_u f(a) = Df(a)\cdot u$$

جمع‌بندی:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

تقریب خطی:
$$f(x) \approx f(a) + Df(a)\cdot(x-a)$$

در حالت $m=1$، تصویرِ عملگر خطی $L(x)= f(a)+Df(a)\cdot(x-a)$ یک ابرصفحه مماس بر نمودار تابع در نقطه $(a, f(a))$ را ارائه می‌دهد.

مثال: $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2-y}$ و تخمینی برای $f(2.9\,,\,1.1)$ به دست آورید.

$$f(3,1) = 2$$

$$Df(3,1) = \left[\partial_1 f(3,1)\ ,\ \partial_2 f(3,1)\right]$$

$$\partial_1 f = \frac{1}{3}(x^2-y)^{-2/3} \times 2x \Rightarrow \partial_1 f(3,1) = \frac{1}{2}$$

$$\partial_2 f = \frac{-1}{3}(x^2-y)^{-2/3} \Rightarrow \partial_2 f(3,1) = \frac{-1}{12}$$

نکته: در نقاطی که $y \neq x^2$، مشتق‌های جزئی وجود دارند و پیوسته هستند. لذا تابع f مشتق‌پذیر است و می‌توان از تقریب خطی استفاده کرد.

$$\underbrace{f(2.9,\ 1.1)}_{x} \approx f(\underbrace{3,1}_{a}) + Df \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}}_{x-a}$$

$$= 2 + \left[\tfrac{1}{2},\ \tfrac{-1}{12}\right] \cdot \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 2 - \frac{1}{20} - \frac{1}{120}$$

معادله صفحه مماس بر نمودار تابع $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2-y}$ در نقطه $(3,1)$:

$$z = L(x,y) = f(3,1) + Df \cdot \begin{bmatrix} x-3 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$z = 2 + \left[\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{12}\right] \begin{bmatrix} x-3 \\ y-1 \end{bmatrix} = \frac{x}{2} - \frac{y}{12} + 2 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{12}$$

مثال: $f(x,y) = \sin(xy)$ ، $f(\pi/3, 1) = \sqrt{3}/2$

معادله صفحه مماس بر نمودار این تابع در نقطه $(\pi/3, 1)$ را پیدا کنید.

$$\partial_x f(x,y) = y\cos(xy) \quad , \quad \partial_y f(x,y) = x\cos(xy)$$

مشتق‌های جزئی همه جا تعریف می‌شوند و پیوسته هستند در نتیجه تابع f مشتق‌پذیر است.

$$Df(\pi/3, 1) = [1/2 \, , \, \pi/6]$$

معادله صفحه مماس:

$$z = f(\pi/3, 1) + Df(\pi/3, 1) \cdot \begin{bmatrix} x - \pi/3 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{3}/2 + \frac{x}{2} + \pi/6 \, y - \pi/3$$

معادله خط قائم بر نمودار در نقطه $(\pi/3, 1)$:

راستای قائم برابر است با راستای قائم صفحه مماس که عبارت است از $(1/2, \pi/6, -1)$

و معادله خط برابر است با:

$$\frac{x - \pi/3}{1/2} = \frac{y - 1}{\pi/6} = \frac{z - \sqrt{3}/2}{-1}$$

<u>مثال:</u> فاصله نقطه $(3,0,0)$ را تا سهمی‌گون هذلولوی $z=x^2-y^2$ پیدا کنید.

فرض کنید این فاصله در نقطه‌ای به دست می‌آید که خط حاصل آن با نقطه $(3,0,0)$ بر سهمی‌گون عمود است.

در نقاط مختلف $z=x^2-y^2$ معادله خط قائم را می‌نویسیم و در بین آن‌ها خطی که گرایش از نقطه $(3,0,0)$ می‌گذرد.

$$f(x,y)=x^2-y^2 \Longrightarrow Df(a,b)=[2a\ ,\ -2b]$$

معادله صفحه مماس $\qquad z=f(a,b)+Df(a,b)\cdot\begin{bmatrix}x-a\\ y-b\end{bmatrix}$

راستای قائم در نقطه $(a,b,f(a,b)) = (\partial_1 f\ ,\ \partial_2 f\ ,\ -1)=(2a\ ,\ -2b\ ,\ -1)$

برای اینکه خط قائم از نقطه $(3,0,0)$ بگذرد باید $(3-a,-b,-a^2+b^2)$ موازی راستای قائم باشد. یعنی

$$\frac{3-a}{2a}=\frac{-b}{-2b}=\frac{-a^2+b^2}{-1}$$

اگر $b \neq 0 \Leftarrow$ $\quad a = 3/2 \,,\; b = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

اگر $b = 0 \Leftarrow$

$$(3-a, 0, -a^2) \parallel (2a, 0, -1)$$

$$\Rightarrow 2a^3 = 3 - a \Rightarrow 2a^3 + a - 3 = (a-1)(2a^2 + 2a + 3)$$

$$\Rightarrow a = 1$$

پای عمود نقطه $(3,0,0)$ بر رویه $z = x^2 - y^2$ سه نقطه

$$\left(3/2, \pm\sqrt{7}/2, \frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad (1, 0, 1)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$\frac{\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $\sqrt{5}$ فاصله تا این نقطه

خواهد بود.

ریاضی عمومی ۲

جلسه چهارده ۹۷/۱/۲۶

خواص مشتق:

۱) جمع: $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که هر دو در نقطه a مشتق‌پذیرند، آنگاه تابع $f \pm g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و

$$D(f \pm g)(a) = Df(a) \pm Dg(a)$$

جمع ماتریسی

۲) ضرب اسکالر: توابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ، $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ هر دو در نقطه a مشتق‌پذیرند، آنگاه $hf : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نیز در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$D(hf)(a) = h(a)\, Df(a) + Dh(a) \otimes f$$

$$f = (f_1, \dots, f_m) \qquad \partial_i (h f_j) = \partial_i h \cdot f_j + h\, \partial_i f_j$$

$$\underbrace{Dh(a)}_{\text{بردار } n\times 1} \otimes \underbrace{f}_{\text{بردار } m\times 1} = [\partial_i h \cdot f_j]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

ماتریس $m \times n$ ←

③ ضرب داخلی:

$$f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$D(f \cdot g)(a) = g(a)^T Df(a) + f(a)^T Dg(a)$$

ضرب داخلی

$$f \cdot g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f = (f_1, \dots, f_m) \quad , \quad g = (g_1, \dots, g_m) \qquad f \cdot g = f_1 g_1 + \dots + f_m g_m$$

$$\partial_i (f \cdot g) = (\partial_i f_1 \, g_1 + f_1 \, \partial_i g_1) + \dots + (\partial_i f_m \, g_m + f_m \, \partial_i g_m)$$

$$= \partial_i f \cdot g + f \cdot \partial_i g$$

ضرب داخلی　　ضرب داخلی

۴) اگر تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطه a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در نقطه a پیوسته است.

۵) قاعده زنجیری : $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و $g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ در نقطه $f(a)$ مشتق‌پذیر است، آنگاه $g\circ f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$D(g\circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

ضرب ماتریسی

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

توضیح : اگر f را با تبدیل خطی $x \longmapsto Df(a)x$ تقریب بزنیم و همینطور g را با $y \longmapsto Dg(f(a))y$ ، آنگاه ترکیب این دو تبدیل خطی تقریب خطی برای تابع $g\circ f$ است.

مثال: $z = \sin(x^2 y)$ که در آن $x = st^2$ ، $y = s^2 + \frac{1}{t}$ ، مقادیر $\frac{\partial z}{\partial t}$ ، $\frac{\partial z}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

$$\underset{(s,t)}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{z}{\mathbb{R}}$$

$$(x,y) = f(s,t) \quad , \quad z = g(x,y) \quad , \quad z = g \circ f\,(s,t)$$

$$Dz = \left(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) = Dg \cdot Df$$

$$Dg = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[2xy\cos(x^2 y) \;,\; x^2\cos(x^2 y)\right]$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & 2st \\ 2s & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(2xyt^2 + 2x^2 s\right)\cos(x^2 y) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \;?$$

قاعده زنجیری از نگاهی دیگر:

$$\underset{x=(x_1,\dots,x_n)}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\ f\ } \underset{y=(y_1,\dots,y_m)}{\mathbb{R}^m} \xrightarrow{\ g\ } \underset{z=(z_1,\dots,z_k)}{\mathbb{R}^k}$$

$$y = f(x) \,, \qquad z = g(y)$$

$$\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] = D(g\circ f) = Dg \cdot Df = \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right]\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]$$

ماتریس $k\times m$ ماتریس $m\times n$

$\dfrac{\partial z_i}{\partial x_j}$ = درایه سطر i-ام و ستون j-ام ماتریس $D(g\circ f)$ = (سطر i-ام ماتریس Dg) · (ستون j-ام ماتریس Df)

$$= \left[\frac{\partial z_i}{\partial y_1}, \ \dots, \ \frac{\partial z_i}{\partial y_m}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z_i}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j}$$

مثال: فرض کنید $T(x,y,z,t)=\frac{xy}{1+z}(1+t)$ دما در نقطه (x,y,z) در زمان t را نشان دهد.

اگر ذره‌ای در نقطه $(1,2,3)$ با سرعت لحظه‌ای $V=(1,1,1)$ در زمان $t=1$ می‌گذرد.

میزان تغییرات دما در آن لحظه چه مقدار است؟

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{مسیر حرکت}} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = ? \qquad = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\cdot\underbrace{\frac{\partial t}{\partial t}}_{=1}$$

$$\text{بردار سرعت} = \left.\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)\right|_{t=1} = (1,1,1) \qquad \left.(x,y,z)\right|_{t=1} = (1,2,3)$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = \frac{y}{1+z}(1+t) + \frac{x}{1+z}(1+t) + \frac{-xy}{(1+z)^2}(1+t) + \frac{xy}{1+z}$$

$$= \frac{2}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 2 - \frac{2}{16}\times 2 + \frac{2}{4} = \cdots$$

مثال: $f(x,y) = x^2 - y^2$ و (r,θ) مختصات قطبی صفحه باشند، $\frac{\partial f}{\partial r}$ و $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ را محاسبه کنید.

$$\underset{(r,\theta)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{\text{نگاشت تغییر مختصات}} \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) + (-2y)(r\cos\theta) = -4xy$$

مثال:

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h(x,y) = xy^2 \quad , \quad f(x,y) = (\sin(x^2y) \, , \, 2x)$$

$$(h.f)(x,y) = (xy^2 \sin(x^2y) \, , \, 2x^2y^2)$$

ضرب اسکالر

$$D(hf)(a) = h(a)\, Df(a) + Dh(a) \otimes f$$

$$Df = \begin{bmatrix} 2xy\cos(x^2y) & x^2\cos(x^2y) \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Dh = \begin{bmatrix} y^2 \, , & 2xy \end{bmatrix}$$

$$Dh \otimes f = \begin{bmatrix} y^2\sin(x^2y) & 2xy\sin(x^2y) \\ 2xy^2 & 4x^2y \end{bmatrix}$$

$$D(hf) = xy^2 \begin{bmatrix} 2xy\cos(x^2y) & x^2\cos(x^2y) \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^2\sin(x^2y) & 2xy\sin(x^2y) \\ 2xy^2 & 4x^2y \end{bmatrix}$$

مشتقات مراتب بالاتر: اگر تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر i می‌توان از
مشتقات جزئی تابع $\partial_i f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ صحبت کرد. اگر این تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه
مشتقات جزئی رتبه دوم وجود دارند که با

$$\partial_j(\partial_i f) = \partial_{ji} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

نشان می‌دهیم.

مثال: $z=f(x,y)$، $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\underbrace{\frac{\partial z}{\partial \theta}}_{:=w}\Big) = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = -y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\[2em] \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta = -y \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta = x$$

سؤال: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ چه ارتباطی باهم دارند؟

مثال- $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y + x\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + y\right) = 1$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه یازده ۹۷/۱/۲۸

قضیه (جابجایی مشتق‌های جزئی) اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ در یک همسایگی حول نقطه a تعریف شده و در نقطه a پیوسته باشند، آنگاه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

اثبات - قضیه ۱ صفحه ۵۴۳ کتاب را مطالعه کنید.

نکته: تعمیم قضیه فوق برای جابجایی مشتق‌های جزئی تا مرتبه k به طور مشابه برقرار است. یعنی اگر همه مشتق‌های جزئی تا مرتبه K در همسایگی a وجود داشته باشند و در نقطه a پیوسته باشند، آنگاه ترتیب مشتق‌گیری اهمیت ندارد.

حل -

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(2y(x^2-y^2)+4x^2y\right)(x^2+y^2)-4x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y}=-2$$

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(2x(x^2-y^2)-4xy^2\right)(x^2+y^2)+4xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

اگر $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ را در همین نقطه حساب کنیم متوجه خواهیم شد که هر چند این دو تابع هم جا تعریف می‌شوند ولی در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیستند. لذا شرایط برای جابجایی مشتق در نقطه $(0,0)$ وجود ندارد.

تمرین: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ را محاسبه کنید و نشان دهید که در $(0,0)$ پیوسته نیستند.

<u>نظریه تقریب</u>: اگر تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، در نقطه a، K بار مشتق‌پذیر باشد، تعادل $f(x)$ را با یک چندجمله‌ای تیلور می‌توان تقریب زد:

$$f(x) \approx P_K(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{K!}(x-a)^K f^{(K)}(a)$$

در واقع داریم:

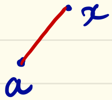
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_K(x)}{(x-a)^K} = 0$$

بعلاوه خطای این تقریب عبارت است از

$$f(x+a)-P_k(x)=\frac{1}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}f^{(k+1)}(b)$$

تقریب خطی $(k=1)$ در ابعاد بالاتر:

$$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$



$$\varphi(t)=f(a+t(x-a))$$

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2}\varphi''(\theta)\qquad 0<\theta<1$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$T(t)=a+t(x-a)=(a_1+t(x_1-a_1),\dots,a_n+t(x_n-a_n))$$

بنابر قاعده زنجیری

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot(x_n-a_n)$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}x_1-a_1\\ \vdots\\ x_n-a_n\end{bmatrix}=Df\cdot(x-a)$$

$$\varphi'(0) = \partial_1 f(a)\cdot(x_1-a_1) + \cdots + \partial_n f(a)\cdot(x_n-a_n) = Df(a)\cdot(X-a)$$

$$\varphi(1) = f(x) \;,\quad \varphi(0) = f(a)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \underbrace{f(a) + Df(a)\cdot(X-a)}_{\text{تقریب خطی}} + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi''(\theta)}_{\text{مقدار خطا}}$$

$$\varphi''(\theta) = \frac{d}{dt}\Big(\partial_1 f(a+t(x-a))\cdot(x_1-a_1) + \cdots + \partial_n f(a+t(x-a))\cdot(x_n-a_n)\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\partial_i f(a+t(x-a))\Big) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j\partial_i f(a+t(x-a))\cdot(x_j-a_j)$$

$$\varphi''(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\partial_i f)\cdot(x_i-a_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j\partial_i f(a+\theta(x-a))\cdot(x_j-a_j)(x_i-a_i)$$

قرار دهید:

$$H(x)=\begin{bmatrix} \partial_{11}f(x) & \partial_{12}f(x) & \cdots & \partial_{1n}f(x) \\ \partial_{21}f(x) & & \cdots & \partial_{2n}f(x) \\ \vdots & & & \\ \partial_{n1}f(x) & & \cdots & \partial_{nn}f(x) \end{bmatrix}$$

این ماتریس را ماتریس هسیان تابع f می‌نامیم.

می‌توان دید که عبارت $\varphi''(\theta)$ برابر است با

$$(x-a)^T H(a+\theta(x-a))\cdot(x-a)$$

نتیجه:

$$f(x)=f(a)+Df(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^T H(\xi)(x-a)$$

که ξ یک نقطه روی پاره‌خط واصل بین x و a است.

مثال: $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2-y}$ مقدار $f(3{,}1\,,\,0{,}9)$ را با تقریب محاسبه کنید.

$$f(3,1)=2 \quad , \quad X=(3{,}1\,,\,0{,}9) \quad , \quad a=(3,1)$$

تقریب تیلور برای $k=0$،

$$f(X)=\underbrace{f(a)}_{\text{تقریب}}+\underbrace{Df(\xi)\cdot(X-a)}_{\text{خطا}}$$

$$\left|f(3{,}1\,,\,0{,}9)-2\right| \le \left|Df(\xi)\right|\cdot\left|X-a\right|$$

$$Df=\left(\frac{2x}{3}(x^2-y)^{-2/3}\ ,\ \frac{-1}{3}(x^2-y)^{-2/3}\right)$$

برای تقریب مقدار خطا باید تخمینی از $Df(\xi)$ دهیم ξ روی پاره‌خط X و a قرار دارد پیدا کنیم.

در این حالت $3<x<3{,}1$ و $0{,}9<y<1$

$$8\le(x^2-y) \Rightarrow \left|Df(\xi)\right| \le \left(\left[\frac{2\times 3{,}1}{3}\times\frac{1}{4}\right]^2+\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right]^2\right)^{1/2} < \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$|X-a|=0{,}1\sqrt{2}$$

$$\left|f(۳٫۱,\ ۰٫۹)-۲\right| \leq \frac{۰٫۵}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

تقریب خطی (تیلور $k=۱$)

$$f(x)-f(a)-Df(a)\cdot(x-a)=\frac{۱}{۲}(x-a)^{t}H(\xi)\,(x-a)$$

$$Df(۳٫۱)=\left(\frac{۱}{۲},\ \frac{-۱}{۱۲}\right)$$

$$f(۳٫۱;\ ۰٫۹)\approx ۲+\left(\frac{۱}{۲},\ \frac{-۱}{۱۲}\right)\times\begin{pmatrix}۰٫۱\\ -۰٫۱\end{pmatrix}=۲+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۲۰}$$

$$\partial_{11}f=\frac{۲}{۳}(x^{۲}-y)^{-۲/۳}-\frac{۴}{۹}x(x^{۲}-y)^{-۵/۳}=\frac{۲}{۳}(x^{۲}-y)^{-۵/۳}\left[(x^{۲}-y)-\frac{۲}{۳}x\right]$$

$$\left|\partial_{11}f(\xi)\right|\leq\frac{۲}{۳}\times ۲^{-۵}\times\left[(۳٫۱)^{۲}-۱-۲\right]<\frac{۲^{-۴}\times ۷}{۳}$$

$$Df = \left(\frac{2x}{3}(x^2-y)^{-2/3} \,,\; \frac{-1}{3}(x^2-y)^{-2/3} \right)$$

$$\partial_{12} f = \frac{2}{9}(x^2-y)^{-5/3} \times 2x \quad \Rightarrow \quad |\partial_{12} f(\xi)| \leq \frac{2}{9} \times 2^{-5} \times 7 < 2^{-4}$$

$$\partial_{22} f = \frac{-2}{9}(x^2-y)^{-5/3} \quad \Rightarrow \quad |\partial_{22} f(\xi)| \leq \frac{2}{9} \times 2^{-5}$$

$$\left| (x-a)^t H(\xi) (x-a) \right| = \left| (x_1-a_1)^2 \partial_{11} f + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2)\partial_{12} f + (x_2-a_2)^2 \partial_{22} f \right|$$

$$\leq 0.01 \times \left[\frac{7}{3} \times 2^{-4} + 2 \times 2^{-4} + \frac{2^{-4}}{9} \right]$$

$$< 0.01 \times 2^{-4} \times 5 < 0.001$$

چندجمله‌ای تیلور مرتبه دو . $(k=2)$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{6}\varphi^{(3)}(\theta)$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + Df(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t H(a)(x-a)}_{\text{چندجمله‌ای تیلور درجه دو}} + \underbrace{\frac{1}{6}\varphi^{(3)}(\theta)}_{\text{خطا}}$$

برای محاسبه خطا باید از $\varphi''(\theta)$ یکبار دیگر مشتق بگیریم .

$$\varphi'''(\theta) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}\big(a+\theta(x-a)\big) \cdot (x_k-a_k)(x_j-a_j)(x_i-a_i)$$

قرار دهید : $\Delta = X - a = (x_1-a_1, \dots, x_n-a_n)$ و

$$\partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\Delta \cdot \partial = (x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$(\Delta \cdot \partial)^k = \left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k$$ به معنای یک عملگر دیفرانسیل قرار دهید:

$$\varphi^{(k)}(t) = (\Delta \cdot \partial)^k f(a+t(x-a))$$

با این کار چندجمله‌ای تیلور مرتبه k برای تابع $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$P_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}(\Delta \cdot \partial)^m f(a)$$

$$\text{خطای تقریب} = \frac{1}{(k+1)!}(\Delta \cdot \partial)^{k+1} f(\xi)$$

که ξ یک نقطه روی پاره خط واصل بین a و x است.

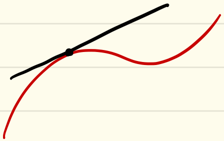
ریاضی عمومی ۲

جلسه شانزده ۹۷/۲/۲

بررسی سطوح تراز

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

رابطه $y = f(x)$ نمودار تابع را در فضای $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ نشان می‌دهد.



اگر $A = Df(a)$ مشتق تابع در نقطه a در نظر بگیریم آنگاه

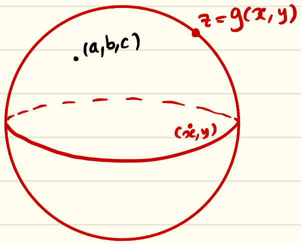
$$y = f(a) + A(x-a)$$

معادله صفحه مماس بر نمودار تابع است. به علاوه رابطه بالا یک تقریب خطی از تابع تعریف می‌کند.

سوال ۱: اگر تابع $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد، چگونه صفحه مماس بر سطح تراز $f(X)=c$ را پیدا کنیم؟

مثال: $x^2+y^2+z^2=1$ که معادله یک کره در $\mathbb{R}^3$ است.

راه‌حل اول: رابطه $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=c$ را به صورت نمودار تابع بیان کنیم یعنی تابع $g: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ پیدا کنید که $x_n = g(x_1,\dots,x_{n-1})$. در این حالت معادله صفحه مماس به کمک مشتق g بیان می‌گردد.



مثال: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}=g(x,y)$

$$\partial_x g = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

معادله صفحه مماس در نقطه (a,b,c) که $c>0$ ، $a^2+b^2+c^2=1$.

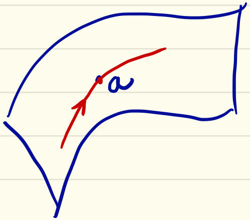
$$z-g(a,b) = \partial_x g(a,b)\cdot(x-a) + \partial_y g(a,b)\,(y-b)$$

$$\boxed{z-c = \frac{-a}{c}\cdot(x-a) - \frac{b}{c}\,(y-b)}$$

اگر $c<0$ به طور مشابه با رابطه $z=-g(x,y)$ می‌توان صفحه مماس را پیدا کرد.

اگر $c=0$ ، قطعاً $a\neq 0$ یا $b\neq 0$. اگر به عنوان مثال $a\neq 0$ می‌توان از رابطه $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ صفحه مماس را پیدا کرد.

راه حل دوم: همه خم‌های دلخواه روی سطح تراز $f(x_1,\dots,x_n)=c$ را در نظر بگیرید.



مانند خم $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ که $\gamma(0)=a$

در این صورت $\gamma'(0)$ یک بردار از صفحه مماس بر سطح تراز خواهد بود.

همه $\{\gamma'(0)\}$ به ازای خم‌های مختلف تشکیل یک زیرفضای $n-1$ بعدی می‌دهد که بر سطح تراز در نقطه a مماس است.

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t)) \Rightarrow f(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))=c$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[f(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\right]=0$$

$$\Rightarrow \partial_1 f(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)+\partial_2 f(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)+\dots+\partial_n f(\gamma(t))\,\gamma_n'(t)=0$$

$$\gamma(0)=a \Rightarrow \partial_1 f(a)\,\gamma_1'(0)+\dots+\partial_n f(a)\,\gamma_n'(0)=0$$

$$(\partial_1 f(a),\dots,\partial_n f(a))\cdot(\gamma_1'(0),\dots,\gamma_n'(0))=0$$

تعریف: $\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$ گرادیان تابع f

نکته: گرادیان چیزی جز مشتق تابع نیست. و برای تابعی که تصویر آن یک بعدی است استفاده می‌شود. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

جمع‌بندی: گرادیان یک تابع، بر سطح تراز آن عمود است. و معادله صفحه مماس بر سطح تراز $f(X) = c$

به صورت

$$\{ X \in \mathbb{R}^n : (X - a) \cdot \nabla f(a) = 0 \}$$

خواهد بود.

مثال: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftarrow \nabla f(a,b,c) = (2a, 2b, 2c)$

معادله صفحه مماس $(x-a, y-b, z-c) \cdot (2a, 2b, 2c) = 0$

مثال: اشتراک دو رویه $z = x^2 - y^2$ و $xyz + 30 = 0$ یک منحنی است که از نقطه $(-3, 2, 5)$ می‌گذرد. یک بردار مماس بر این منحنی را پیدا کنید.

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z \implies \nabla f(-3,2,5) = (-6,-4,-1)$$

$$g(x,y,z) = xyz + 30 \implies \nabla g(-3,2,5) = (10,-15,-6)$$

بردار مماس بر منحنی در هر دو صفحه مماس $z = x^2 - y^2$ و $xyz + 30 = 0$ قرار دارد لذا بر هر دو گرادیان عمود است

در نتیجه بردار مماس هم‌راستای $\nabla f(-3,2,5) \times \nabla g(-3,2,5)$ است.

مثال: نمودار تابع $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $z = f(x,y)$ منابع یک سطح تراز تابع

$g(x,y,z) = z - f(x,y)$ است. بنابراین $\nabla g = (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1)$ عمود بر این سطح تراز

یا نمودار تابع f است. از قبل می‌دانستیم که معادله صفحه مماس بر نمودار به صورت

$$z - f(a,b) = \partial_1 f \cdot (x-a) + \partial_2 f \cdot (y-b)$$

است. که در واقع نشان می‌دهد بردار

$$(\partial_1 f, \partial_2 f, -1)$$

باید بر این صفحه عمود باشد.

خاصیت مهم دیگر از گرادیان:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

مشتق جهتی در راستای u $\quad D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u \leq |\nabla f(a)| \cdot |u|$

اگر $|u|=1$ نامساوی زیر برقرار است: $\quad -|\nabla f(a)| \leq D_u f(a) \leq |\nabla f(a)|$

حالت تساوی بیشترین مقدار $D_u f$ وقتی اتفاق می‌افتد $\quad u = \dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$

حالت تساوی کمترین مقدار $D_u f$ وقتی است که $\quad u = -\dfrac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$

$$f(a+hu) \approx f(a) + D_u f(a) h$$

جمع‌بندی: در نقطه a در راستای $\nabla f(a)$ بیشترین افزایش تابع را داریم.

و در راستای $-\nabla f(a)$ بیشترین کاهش تابع را داریم.

مثال: فرض کنید $h(x,y)=\frac{2}{3+x^2+2y^2}$ میزان ارتفاع یک کوه را نشان می‌دهد. یک نهری از آب از نقطه $(3,2)$ حرکت می‌کند. آب در مسیری حرکت می‌کند که بیشترین کاهش ارتفاع را داشته باشد. مسیر حرکت نهر آب را پیدا کنید.

$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ همان مسیر حرکت.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \gamma'(t) = -\alpha \nabla h(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (3,2) \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$\nabla h = \left(\frac{-4x}{(3+x^2+2y^2)^2} , \frac{-8y}{(3+x^2+2y^2)^2} \right)$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \Longrightarrow \begin{cases} x' = -\alpha \times \frac{-4x}{(3+x^2+2y^2)^2} \\ y' = -\alpha \times \frac{-8y}{(3+x^2+2y^2)^2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{2y}$$

$$\Longrightarrow \ln x = \tfrac{1}{2} \ln y + C$$

$$\Longrightarrow x^2 = K y$$

$$\gamma(0) = (3,2) \Rightarrow K = 9/4$$

سؤال 2 : اگر سطح تراز $f(x,y,z)=c$ داده شده باشد، آیا می‌توان z را به صورت تابعی برحسب (x,y) نوشت؟ درواقع آیا سطح تراز نمودار تابع $z=g(x,y)$ است؟

مثال که نشان می‌دهد که این کار همیشه امکان‌پذیر نیست. مثلاً سطح تراز $x^2+y^2+z^2=1$ در نقاط $z\neq 0$ به صورت $z=g(x,y)$ قابل بیان است.

فرض کنید چنین کاری شدنی باشد، آیا تابع g مشتق‌پذیر است؟ آیا می‌توان مشتقات g را برحسب f بیان کرد؟

$$f(x,y,g(x,y))=c \xrightarrow{\partial/\partial x} \partial f/\partial x + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}$$

به شرط آنکه $0\neq\frac{\partial f}{\partial z}$

قضیه تابع ضمنی : اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد که $\partial_3 f(a,b,c)\neq 0$.

آنگاه تابع مشتق‌پذیر $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ وجود دارد که به ازای یک مقدار $0<r$ کوچک تساوی زیر اتفاق می‌افتد.

$$\{(x,y,g(x,y)) : |x-a|\leq r,\ |y-b|\leq r\}$$

$$=\{(x,y,z) : f(x,y,z)=c\ ,\ |x-a|\leq r,\ |y-b|\leq r\}$$

این تساوی بدین معنا است که سطح تراز $f(x,y,z)=c$ در همسایگی نقطه (a,b,c) به صورت نمودار تابع $z=g(x,y)$ بیان می‌شود. در ضمن مشتقات پاره‌ای تابع g از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\partial_x g(x,y)=\frac{-\partial_x f(x,y,g(x,y))}{\partial_z f(x,y,g(x,y))}\ ,\qquad \partial_y g(x,y)=\frac{-\partial_y f(x,y,g(x,y))}{\partial_z f(x,y,g(x,y))}$$

نکته: اگر تابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $\partial_n f(a) \neq 0$ ، آنگاه سطح تراز $f(X)=c$ در همسایگی نقطه a

به صورت نمودار تابع مشتق‌پذیر $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ بیان می‌شود و

$$\partial_i g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{-\partial_i f(X)}{\partial_n f(X)}$$

قضیه تابع ضمنی: $f: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و سطح تراز $f(X,Y)=0$ را در نظر بگیرید

که $X \in \mathbb{R}^n$ ، $Y \in \mathbb{R}^m$ ، $f=(f_1, \dots, f_m)$ که

$$\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right]_{m\times m} \neq 0$$

آنگاه تابع مشتق‌پذیر $g: B_{r_1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B_{r_2}(b) \subseteq \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $f(X, g(X))=0$ به علاوه

$$\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} = -\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]^{-1}_{m\times m} \times \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}$$

$$f(x,y)=0 \qquad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$y=g(x) \qquad g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$h(x)=f(x,g(x))=0 \qquad h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \quad D_x h \equiv 0$$

$$\underset{m\times n}{Dh} = \underset{m\times n}{D_x f} + \underset{m\times m}{D_y f} \cdot \underset{m\times n}{D_x g} = 0$$

$$D_x g = -(D_y f)^{-1} \cdot D_x f$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه هفدهم ۹۷/۲/۴

مثال: در رابطه $x^2y+xy^3=2$ در چه نقاطی می‌توان y را برحسب x نوشت؟ $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

$$f(x,y)=x^2y+xy^3-2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3xy^2\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -3y^2 \end{cases}$$

$$x=-3y^2 \Rightarrow 9y^5-3y^5=2 \Rightarrow y=\sqrt[5]{1/3}$$

در همه نقاط روی این خم به جز نقطه $\left(-3\sqrt[5]{\frac{1}{9}}, \sqrt[5]{1/3}\right)$ می‌توان y را به عنوان تابعی از x نوشت.

$$\partial_x f+\frac{dy}{dx}\cdot\partial_y f=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^3}{x^2+3xy^2}$$

مثال- در مثال قبل $\frac{dx}{dy}$ در چه نقاطی تعریف شده است؟

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+y^3\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y\neq 0 \\ 2x\neq -y^2 \end{cases}$$

$$2x=-y^2 \Rightarrow \frac{y^5}{4}-\frac{y^5}{2}=2 \Rightarrow y=-\sqrt[5]{8}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{\partial_y f}{\partial_x f}$$

به غیر از نقطه $\left(-\sqrt[5]{2}, -\sqrt[5]{8}\right)$ در بقیه نقاط x را به عنوان تابعی از y می‌توان در نظر گرفت.

مثال: $xy^3+z-y=0$ بررسی کنید که کدام متغیر برحسب دو تای دیگر قابل بیان است؟

$$f(x,y,z)=xy^3+z-y$$

x تابعی از (y,z)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^3\neq 0 \implies x=g(y,z)$$

در همه نقاط به غیر از $(x,0,0)$ می‌توان x را به عنوان تابعی از y و z نوشت.

$$\partial_x f\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\partial_y f=0 \implies \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{3xy^2-1}{y^3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\partial_z f}{\partial_x f}=-\frac{1}{y^3}$$

y تابعی از (x,z)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3xy^2-1\neq 0 \implies y=h(x,z)$$

$$3xy^2=1 \implies z=\frac{2y}{3},$$

به غیر از نقاط $\left(-\frac{1}{3y^2},y,\frac{2y}{3}\right)$ در بقیه نقاط y تابع مشتق‌پذیر از x و z است

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-\partial_x f}{\partial_y f}\ ,\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial_z f}{\partial_y f}$$

مثال- مقدار تقریبی y را پیدا کنید که نقطه $(1.01, y, 5.9)$ روی رویه $xy^3+z-y=0$ قرار بگیرد.

ابتدا y را به عنوان تابعی از (x,z) محاسبه می‌کنیم.

$$f(x,y,z)=xy^3+z-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2,6) = 3\times 4 - 1 \neq 0$$

بنابراین در همسایگی نقطه $(1,-2,6)$ می‌توان y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از (x,z) نوشت.

$$y = h(x,z)$$

$$h(1.01,\ 5.9) \approx h(1,6) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(1,6)} \times 0.01 + \left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{(1,6)} \times (-0.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left.\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right|_{(1,-2,6)} = \frac{8}{11} \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial z} = -\left.\frac{\partial f/\partial z}{\partial f/\partial y}\right|_{(1,-2,6)} = \frac{-1}{11}$$

$$y = h(1.01, 5.9) \approx -2 + \frac{0.18}{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^3}{3y^2-1} \Longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{3y^2\frac{\partial y}{\partial x}(3y^2-1) - 6y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)y^3}{(3y^2-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{\partial y}{\partial x}\left[3y^4-3y^2\right]}{(3y^2-1)^2} = \frac{y^3(3y^4-3y^2)}{(3y^2-1)^3}$$

تمرین: مشتقات رتبه دوم $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ ، $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ را محاسبه کنید و یک کران بالا برای خطای تقریب خطی شامل تیلر پیدا کنید.

مثال:
$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^3y + 2y^2z^2 - xz^3 = 0 \\ g(x,y,z) = e^{y+z} - x = 0 \end{cases}$$
در همسایگی نقطه $(1,0,0)$ کدام دو متغیر برحسب سومی به کمک یک تابع مشتق‌پذیر قابل محاسبه است؟

برای اینکه (x,y) به صورت تابعی از z باشد باید

$$\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right)\Bigg|_{(1,0,0)} \neq 0$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 3x^2y - z^3 & x^3+4yz^2 \\ -1 & e^{y+z} \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ وارون‌پذیر است

بنابراین $(x,y) = h(z)$ قابل تعریف است.

$$\begin{cases} \partial_x f \cdot \dfrac{dx}{dz} + \partial_y f \cdot \dfrac{dy}{dz} + \partial_z f = 0 \\ \partial_x g \cdot \dfrac{dx}{dz} + \partial_y g \, \dfrac{dy}{dz} + \partial_z g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz} \\ \dfrac{dy}{dz} \end{bmatrix} = - \left[\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \partial_z f \\ \partial_z g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz} \\ \dfrac{dy}{dz} \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,0,0)} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4y^2z - 3xz^2 \\ e^{y+z} \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,0,0)}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تمرین - در این مثال امکان اینکه (x,z) تابعی مشتق پذیر از y باشند و یا (y,z) تابعی از x را بررسی کنید.

مثال: به ازای $z=0.1$ یک تقریب از مقادیر x و y پیدا کنید که در معادله مثال قبل صدق کنند.

$$h(0.1) \approx h(0) + h'(0) \times 0.1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{cases} f = xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ g = x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

در همسایگی نقطه $(1,1,1,1,1)$ ، (u,v) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از (x,y,z) می‌توان در نظر گرفت.

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x-2u^2v \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)\Bigg|_{(1,1,1,1,1)} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = -\left[\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right]^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{bmatrix}$$

قاعده کرامر $\Rightarrow$ $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)}$$

به طور مشابه می‌توان نوشت :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}\right)}{\det\left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)}$$

<u>تابع وارون :</u> فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$f = (f_1 , \dots , f_n)$$

سوال : آیا از رابطه $y = f(x)$ می‌توان x را به عنوان تابعی از y نوشت ؟

$$X = f^{-1}(Y)$$

این مطلب معادل این است که دستگاه

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

را حل کنیم.

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) - y_i$$

$$F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

در دستگاه

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=0 \\ \vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=0 \end{cases}$$

می‌خواهیم $X=(x_1,\dots,x_n)$ را برحسب $Y=(y_1,\dots,y_n)$ بنویسیم.

بنابر قضیه تابع ضمنی باید $\left(\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right)$ وارون‌پذیر باشد. در این صورت می‌توان

$$X=g(Y)\ ,\quad g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

که g یک تابع مشتق‌پذیر است.

$$[Dg]=-\left[\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right]$$

اما از طرفی داریم:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ ,\quad \frac{\partial F_i}{\partial y_j}=\begin{cases}-1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ Dg=-[Df]^{-1}(-I)=[Df]^{-1}$$

<u>قضیه تابع وارون</u>: اگر تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد و $\det Df(a) \neq 0$ آنگاه در همسایگی a

تابع f وارون‌پذیر است و وارون آن مشتق‌پذیر است. در واقع همسایگی‌های $B_{r_1}(a)$ و $B_{r_2}(f(a))$

وجود دارند که $f^{-1}: B_{r_2}(f(a)) \longrightarrow B_{r_1}(a)$ تعریف و مشتق‌پذیر است.

$$Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$$

مثال: $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = uv \end{cases}$ در چه نقاطی (u,v) برحسب (x,y) به‌عنوان تابع مشتق‌پذیر قابل محاسبه هستند؟

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(u,v) = \begin{bmatrix} u^2+v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$Df = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{bmatrix} \qquad \det(Df) = 2(u^2 - v^2)$$

در نقاطی که $u^2 \neq v^2$ است تابع f وارون‌پذیر است یعنی $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ وجود دارد که

$$Dg = (Df)^{-1} \quad , \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = g(x,y)$$

$$\begin{cases} \partial_u f_1 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \partial_v f_1 \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \\ \partial_u f_2 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \partial_v f_2 \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\det\left(\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, v)}\right)}{\det\left(\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}\right)} = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2v \\ 0 & u \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{bmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\det\begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{bmatrix}}$$

مثال: (تغییر مختصات) مختصات قطبی در صفحه:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

این تغییر مختصات را قابل تبدیل گوییم هرگاه (r,θ) به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از (x,y) قابل بیان باشند.

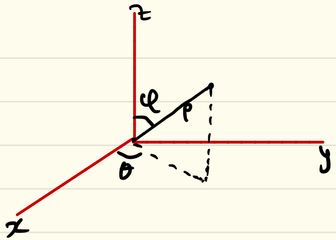
بنابر قضیه تابع وارون به شرط وارون‌پذیر باشد $\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right)$ وارون‌پذیر باشد این کار مجاز است.

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

به جز از مبدأ در بقیه نقاط این تغییر مختصات قابل تبدیل است.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

مختصات کروی :



$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \le \theta \le 2\pi \\ &0 \le \varphi \le \pi \\ &0 < \rho \end{aligned}$$

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \det \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$$

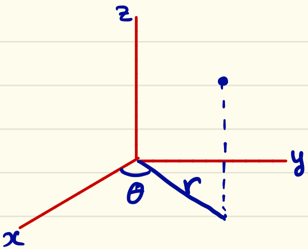
$$= -\rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta\left[-\rho\sin^2\varphi\sin\theta - \rho\cos^2\varphi\sin\theta\right]$$
$$- \rho^2\cos\varphi^2\cos^2\theta\sin\varphi$$

$$= -\rho^2\sin\varphi\left[\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta\right]$$

$$= -\rho^2\sin\varphi$$

به غیر از محور z در بقیه نقاط تغییر مختصات مجاز است.

مختصات استوانه‌ای :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

تمرین : بررسی کنید تغییر مختصات دکارتی به استوانه‌ای در چه نقاطی مجاز است ؟

ریاضی عمومی ۲

جلسه هجدهم ۹۷/۲/۹

مسائل بهینه‌سازی

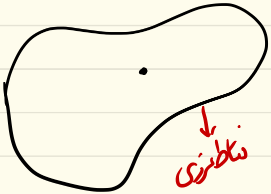
تابع $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است.

هدف این است که $\max\limits_{x \in S} f(x)$ و یا $\min\limits_{x \in S} f(x)$ را پیدا کنیم.

و فرض کنیم این مقادیر اکسترمم در چه نقاطی اتفاق می‌افتد.

کاندیداهای اکسترمم: ۱- نقاط بحرانی: نقاطی که تابع f در آن مشتق‌پذیر است و مشتق تابع در آنجا صفر است.

۲- نقاط مرزی



۳- نقاط تکین (منفرد): نقاطی که تابع در آنجا مشتق‌پذیر نیست.

مثال: $f(x,y) = x^2+y^2+x$ در ناحیه $x^2+y^2 \leq 1$ کوتین شده است.

۱- نقاط بحرانی:

$$\nabla f = (2x+1 \,,\, 2y)$$

$$\nabla f = 0 \implies x=-\tfrac{1}{2} \,,\, y=0 \rightarrow \text{تنها نقطه بحرانی}$$

۲- نقاط مرزی: $x^2+y^2=1$

۳- نقاط تکین (منفرد): این تابع همه جا مشتق‌پذیر است و هیچ نقطه تکینی ندارد.

اکسترمم تابع یا در روی دایره $x^2+y^2=1$ اتفاق می‌افتد یا در نقطه درونی $(-\tfrac{1}{2}, 0)$

$$f(-\tfrac{1}{2},0) = -\tfrac{1}{4} \quad \text{و} \quad 0 \leq f(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = 1+x \leq 2$$

$$\min f = -\tfrac{1}{4} \quad , \quad \max f = 2 = f(1,0)$$

مثال: تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ،

$$\nabla f=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

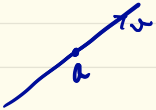
نقطه $(x,y)=(0,0)$ نقطه تکین تابع است.

این تابع نقطه بحرانی ندارد. در واقع در نقاطی که f مشتق‌پذیر است، $\nabla f\neq 0$ خواهد بود.

<u>گزاره:</u> اگر $a\in S$ یک نقطه درونی باشد که در همسایگی آن تابع $f:S\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. اگر

$$f(a)=\max_{x\in S} f(x)$$

آنگاه $\nabla f(a)=0$. یعنی a یک نقطه بحرانی است.



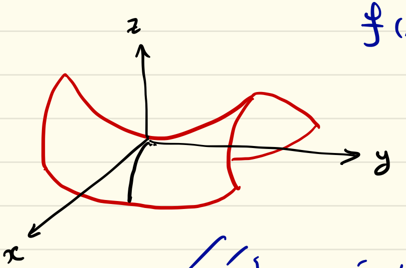
اثبات- برای راستای دلخواه u تابع $\varphi(t)=f(a+t\vec{u})$ در نقطه $t=0$ ماکسیمم خواهد بود.

$$0=\varphi'(0)=\frac{d}{dt}f(a+t\vec{u})\Big|_{t=0}=\nabla f(a)\cdot\vec{u}$$

چون $\vec{u}$ یک بردار دلخواه است پس $\nabla f(a)=0$.

تذکر: ممکن است $\nabla f(a)=0$ ولی تابع f ماکسیمم یا مینیمم خود را در نقطه a نگیرد. به عنوان مثال

$$f(x,y)=x^2-y^2$$



که نمودار آن یک سهمی‌گون هذلولی است. نقطه $a=(0,0)$ یک نقطه بحرانی است. ولی در این نقطه نه ماکسیمم تابع اتفاق می‌افتد نه مینیمم.

اگر در راستای محور x ها حرکت کنیم a نقطه ماکسیمم خواهد بود و اگر در راستای محور y ها حرکت کنیم نقطه مینیمم. این گونه نقاط را به اصطلاح نقاط زینی گوییم.

آزمون مشتق دوم:

$$f(x+a) = \underbrace{f(a)+\nabla f(a)\cdot x}_{\text{تقریب خطی}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)\, x_i x_j}_{\text{خطا}}$$

که نقطه ξ روی پاره خط حاصل بین a و $x+a$ قرار دارد.

$$\text{خطا} = \tfrac{1}{2}\, x^t H(\xi)\, x$$

ماتریس هسیان: $H(\xi) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)\right]_{1\le i,j\le n}$ یک ماتریس متقارن است

$$Q(X) = X^t H(\xi)\, X$$

- اگر به ازای همه مقادیر ξ در یک همسایگی a، فرم درجه دو Q معین منفی باشد، a یک نقطه ماکسیمم موضعی است.

- اگر به ازای 〃 〃 〃 〃 〃 〃 معین مثبت 〃 〃 〃 〃 〃 می‌نیمم موضعی 〃 .

نکته: اگر مشتقات مرتبه دوم تابع f پیوسته باشند و $H(a)$ یک ماتریس معین منفی (معین مثبت) باشد، آنگاه به ازای مقادیر ξ در همسایگی a ماتریس $H(\xi)$ نیز معین منفی (معین مثبت) است.

تعریف: اگر a یک نقطه بحرانی تابع f باشد، آن را نقطه بحرانی ناتبهگون گوییم هرگاه همه مقادیر ویژه ماتریس $H(a)$ ناصفر باشند.

جمع‌بندی (آزمون مشتق دوم): اگر a یک نقطه بحرانی ناتبهگون باشد، آنگاه

(۱) اگر همه مقادیر ویژه $H(a)$ مثبت باشند، آنگاه a یک نقطه‌ی مینیمم موضعی است.

(۲) اگر همه مقادیر ویژه $H(a)$ منفی باشند، آنگاه a یک نقطه ماکسیمم موضعی است.

(۳) اگر k تا مقدار ویژه $H(a)$ مثبت و $n-k$ تا از آنها منفی باشد، آنگاه a یک نقطه زینی است.

یادآوری: همیشه یک ماتریس تغییر مختصات P وابسته به $H(a)$ وجود دارد که در مختصات $Y=PX$،

$$Q(X) = X^t H X = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

که $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه $H(a)$ هستند.

تذکر: اگر نقطه بحرانی a تبهگون باشد، یعنی لااقل یکی از مقادیر ویژه $H(a)$ صفر باشد آنگاه آزمون مشتق دوم قابل استفاده نیست.

مثال: $f(x,y,z) = x^2+12yz+(y-z)^3$. نقاط بحرانی f را رده‌بندی کنید.

$$\nabla f = \left(2x,\ 12z+3(y-z)^2,\ 12y-3(y-z)^2\right)$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow x=0,\quad 12z=-12y=-3(y-z)^2=-12y^2$$

$$\Rightarrow (0,0,0),\ (0,1,-1)$$ تابع f دو نقطه بحرانی دارد

$$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\{2,12,-12\}$ است،

بنابراین $(0,0,0)$ یک نقطه زینی است.

$$H(0,1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow$$ $(0,1,-1)$ مینیمم موضعی است.

نکته: اگر تابع f دو متغیره باشد و $H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ اگر $det = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ و $tr = f_{xx} + f_{yy}$

(1) $det < 0 \Rightarrow$ یکی از مقادیر ویژه مثبت و دیگری منفی است.

(2) $det > 0$, $tr > 0 \Rightarrow$ هر دو مقدار ویژه مثبت است.

(3) $det > 0$, $tr < 0 \Rightarrow$ هر دو مقدار ویژه منفی است.

مثال: $f(x,y) = xy\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

$$\nabla f = \left((y - x^2 y)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ (x - xy^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{\underset{\text{زینی}}{(0,0)},\ \underset{\max}{(1,1)},\ \underset{\min}{(1,-1)},\ \underset{\min}{(-1,1)},\ \underset{\max}{(-1,-1)}\}$$

$$H = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{bmatrix} -2xy - xy(1-x^2) & (1-x^2) - y^2(1-x^2) \\ (1-x^2) - y^2(1-x^2) & -2xy - xy(1-y^2) \end{bmatrix}$$

$$det = e^{-(x^2+y^2)}\left[x^2y^2(3-x^2)(3-y^2) - (1-x^2)^2(1-y^2)^2\right]$$

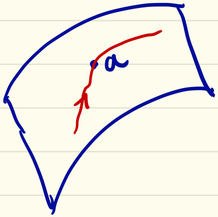
$$tr = -e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, xy\,(6 - x^2 - y^2)$$

یافتن ماکسیمم یا مینیمم روی نقاط مرزی : $\quad f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

فرض کنید مرز S، $\quad \partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \quad$ سطح تراز تابع مشتق‌پذیر

$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. به علاوه فرض کنیم تابع f در نقطه مرزی $a \in \partial S$ ماکسیمم باشد.

مثلاً اگر $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ آنگاه، سطح تراز $g(x,y) = x^2+y^2-1$ مرز S را نشان می‌دهد.



منحنی $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \partial S$ را در نظر بگیرید که روی مرز S حرکت می‌کند و $\gamma(0) = a$

بنابراین باید $g(\gamma(t)) = 0$ باشد به ازای همه مقادیر t.

چون a نقطه ماکسیمم تابع f است پس $\varphi(t) = f(\gamma(t)) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

در نقطه $t=0$ ماکسیمم است. در نتیجه $\quad \varphi'(0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \varphi'(0) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(a) \cdot \gamma'(0)$$

$$\forall t: \quad g(\gamma(t))=0 \quad \Rightarrow \quad \nabla g(a) \cdot \gamma'(0)=0$$ ازطرفی

با تغییر خم γ روی مرز S ، نتیجه می‌شود که هر برداری که بر $\nabla g(a)$ عمود است باید در رابطه

$$\nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0$$

صدق کند. (در واقع با تغییر γ برای همه حالتهای ممکن، بردارهای $\gamma'(0)$ صفحه مماس بر مرز S در نقطه a را تشکیل می‌دهند) در نتیجه در حالتی که a یک نقطه اکسترمم تابع f است باید $\nabla f(a)$ موازی $\nabla g(a)$ باشد.

جمع‌بندی: اگر a یک نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید تابع f به سطح تراز $\{x: g(x)=0\}$ باشد و a یک نقطه بحرانی g نباشد $(\nabla g(a) \neq 0)$ در این صورت $\nabla f(a)$ بر سطح تراز عمود است یا به عبارتی عدد حقیقی λ وجود دارد که $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

تابع لاگرانژین : $L(x;\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

برای اینکه نقاط اکسترمم تابع f را روی سطح تراز $\{g(x)=0\}$ پیدا کنیم، کافی است نقاط بحرانی تابع لاگرانژین L را بیابیم.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda) = g(x) \Rightarrow$$ x روی سطح تراز $\{g(x)=0\}$ است

$$0 = \nabla_x L(x,L) = \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) \Rightarrow$$ ∇f موازی ∇g است.

مثال: روی بیضی‌گون $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ نزدیکترین و دورترین نقطه به $(-1,0,0)$ را بیابید.

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} - 1$$

لاگرانژین $L(x,y,z,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$

نقاط اکسترمم : $\begin{cases} g(x) = 0 \\ \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \end{cases} \Leftarrow$

$$\nabla f = (2(x+1), 2y, 2z)$$

$$\nabla g = (\tfrac{x}{2}, 2y, z)$$

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -\frac{\lambda}{2} x \Rightarrow x = \frac{-2}{\lambda+2} \Rightarrow \lambda \neq -2 \\ y = -\lambda y \Rightarrow y = 0 \text{ یا } \lambda = -1 \\ z = -\lambda/_2\, z \Rightarrow z = 0 \text{ یا } \lambda = -2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$$

نقاط اکسترمم : $(\pm 2, 0, 0)$

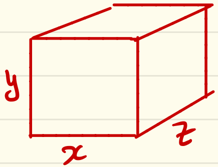
$$\underbrace{f(-2,0,0) = 1}_{\text{مینیمم}} \;,\quad \underbrace{f(2,0,0) = 9}_{\text{ماکسیمم}}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه نوزده ۹۷/۲/۱۱

کاربردهای مشتق (بهینه سازی)

مثال: قرار است یک جعبه مکعب مستطیل بدون در با حجم V درست کنیم. کمترین مساحت پنج وجه این جعبه چه مقداری می‌تواند باشد؟



$$V = xyz$$

$$\text{سطح} = 2xy + 2yz + xz =: f(x,y,z)$$

$$S = \{ (x,y,z) : x,y,z > 0 \ , \ xyz = V \}$$

$$\min_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) = ?$$

راه حل اول: $z = \dfrac{V}{xy} \Leftarrow$

$$\tilde{f}(x,y) := f\left(x,y,\frac{V}{xy}\right)$$

$$= 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

$$\Rightarrow \nabla \tilde{f} = \left(2y - \frac{2V}{x^2} \ , \ 2x - \frac{V}{y^2}\right)$$

• نقاط بحرانی $\tilde{f}$:

$$x^2y = V = 2xy^2$$

دامنه تعریف $\tilde{f}$ عبارت است از $\{(x,y) : x, y > 0\}$ در نتیجه $x, y \neq 0$ و تنها نقاط بحرانی

$x = 2y = \sqrt[3]{2V}$ است.

$z = \sqrt[3]{2V}$

$$\tilde{f}\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right) = 3\sqrt[3]{4V^2}$$

• نقاط مرزی دامنه $\tilde{f}$: $\{(x,0) : x \geq 0\}$ و $\{(0,y) : y \geq 0\}$

از طرفی

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x,y) = \infty$$

$$\lim_{y \to 0^+} \tilde{f}(x,y) = \infty$$

• چون دامنه بیکران است باید حالت حدی $x^2 + y^2 \to \infty$ بررسی شود:

$$\tilde{f}(x,y) = 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{V}{y} \geq 3\sqrt[3]{(2xy)\left(\frac{2V}{x}\right)\left(\frac{V}{y}\right)} = 3\sqrt[3]{4V^2}$$

که از نامساوی $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ استفاده شده است. لذا در نقاط حدی نیز مقدار تابع از مقدار آن در نقطه بحرانی $\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}\right)$ بیشتر است.

نکته: تابع $\tilde{f}$ می‌نیمم خود را در یک نقطه درونی می‌گیرد زیرا در نقاط مرزی و نقاط حدی مقدار تابع از $\tilde{f}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{\frac{2V}{2}}\right)$ بیشتر است. در نتیجه $\min \tilde{f}(x,y)$ در یک نقطه‌ای اتفاق می‌افتد که آن نقطه باید بحرانی باشد.

و چون تابع تنها یک نقطه بحرانی دارد در نتیجه در آن نقطه می‌نیمم تابع به دست می‌آید.

راه حل دوم: $g(x,y,z) = xyz$ و مسئله
$$\begin{cases} \min f(x,y,z) \\ g(x,y,z) = V \end{cases}$$
را حل می‌کنیم.

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$\nabla F = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0, \\ g = V \end{cases} \qquad \begin{aligned} \nabla f &= (2y+z, 2x+2z, 2y+x) \\ \nabla g &= (yz, xz, xy) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y+z = -\lambda yz \\ 2(x+z) = -\lambda xz \\ 2y+x = -\lambda xy \\ xyz = V \end{cases} \Rightarrow 2xy + xz = 2xy + 2yz = 2zy + zx = -\lambda V$$

$$2yz = 2xy = xz = -\frac{\lambda V}{2} \Rightarrow x = z = \frac{-4}{\lambda}, y = \frac{-2}{\lambda}$$

$$xyz = V \Rightarrow -\frac{32}{\lambda^3} = V \Rightarrow \lambda = -\sqrt[3]{\frac{32}{V}}$$

$$\Rightarrow x = z = \sqrt[3]{2V} \quad , \quad y = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

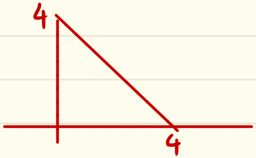
تذکر: در راه حل دوم مسأله بهینه‌سازی مقید $\min f$ با قید $g=V$ در شرایط $x,y,z>0$ بررسی می‌شود.

اگر شرط $x,y,z>0$ را حذف کنیم ولی مینیمم تابع در نقطه (x_0,y_0,z_0) روی رویه $\{g=V\}$ اتفاق بیفتد

باید در آن نقطه ∇f عمود بر سطح رویه باشد. لذا شرط $x,y,z>0$ ایجاب می‌کند که نقاط مرزی رویه

$\{g(x,y,z)=V\}$ که در حالتهای $x=0$ ، $y=0$ یا $z=0$ به عنوان کاندیدای نقاط اکسترمم بررسی شوند. همچنین نقاط حدی

$x^2+y^2+z^2\to\infty$. (با توجه به قید $g(x,y,z)=xyz=V$ وقتی $x\to 0$ ، آنگاه $yz\to\infty$ و در نتیجه $\lim_{x\to 0^+} f(x,y,z)=\infty$



مثال: $S=\{(x,y):\ x,y\geq 0\ ,\ x+y\leq 4\}$

$$f(x,y)=x^2ye^{-(x+y)}$$

مطلوبست $\max\limits_{(x,y)\in S} f(x,y)$.

• نقاط بحرانی:

$$\nabla f=\left(2xy-x^2y\ ,\ x^2-x^2y\right)e^{-(x+y)}$$

$$\nabla f=0 \xRightarrow{x,y>0} x=2,\ y=1\ ,\quad f(2,1)=4e^{-3}$$

• نقاط مرزی: - حالت $x=0$ و یا $y=0$. در هر دو حالت $f=0$.

- حالت $x+y=4$ که به مسأله مقید می‌رسیم:

$$\begin{cases}\max f(x,y)\\ g(x,y)=x+y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla f=-\lambda\nabla g\\ g=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2xy-x^2y)e^{-(x+y)}=-\lambda\\ x^2(1-y)e^{-(x+y)}=-\lambda\\ x+y=4\end{cases}\Rightarrow xy(2-x)=x^2(1-y)=-\lambda e^4$$

$$\Rightarrow x=2y=\frac{8}{3}$$

$$f\left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{4}{3}\right) = \frac{2^8}{3^3}\, e^{-4} < 4\, e^{-3}$$

درنتیجه ماکسیمم در نقطه درونی $(2,1)$ اتفاق می‌افتد.

مسأله بهینه‌سازی مقید با تعداد قیدهای بیشتر: $f, g_1, \dots, g_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(*)\begin{cases} \max f(x) \\ g_1(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

مجموعه نقاط $\{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$ در حالت کلی یک موجود $n-k$ بعدی در $\mathbb{R}^n$ است. (البته برای اتفاق لازم شرط استقلال خطی ∇g_i ها را داشته باشیم) درنتیجه صفحه مماس بر این رویه یک زیرفضای $n-k$ بعدی است و بردارهای عمود بر هر نقطه‌ای یک زیرفضای k بعدی خواهد بود.

در واقع این زیرفضای عمود بر این رویه از ترکیب خطی بردارهای $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ در هر نقطه به دست می‌آید.

مشابه استدلال جلسه قبل اگر جواب این مسأله مقید در نقطه a به دست بیاید باید $\nabla f(a)$ عمود بر رویه و یا ترکیب خطی $\nabla g_i(a)$ باشد.

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(a)$$

تابع لاگرانژین: $F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_k g_k(x)$

مسأله بهینه‌سازی مقید $(*)$ معادل $\max F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ است برای تابع $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

مثال: بیشترین مقدار z روی خم $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$ را به دست آورید.

$$f(x,y,z) = z$$

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 \quad , \quad g_2(x,y,z) = x+2y+3z-1$$

$$\begin{cases} \max f \\ g_1 = g_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = g_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 = 1 \\ x^2+y^2=1 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \ , \ x = \dfrac{-1}{6\lambda_1} \ , \ y = \dfrac{-1}{3\lambda_1} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ z = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

مثال - کوتاهترین فاصله بین دو رویه $g_1(x,y,z)=0$ ، $g_2(x,y,z)=0$ را بیابید.

$g_1(x,y,z)=0 \ , \ g_2(u,v,w)=0$

$$f(x,y,z,u,v,w) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

$$\begin{cases} \min f \\ G_1(x,y,z,u,v,w) = g_1(x,y,z) = 0 \\ G_2(x,y,z,u,v,w) = g_2(u,v,w) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla f = \lambda_1 \nabla G_1 + \lambda_2 \nabla G_2$$

$$\nabla f = 2\left(x-u,\ y-v,\ z-w,\ u-x,\ v-y,\ w-z\right)$$

$$\nabla G_1 = \left(\partial_1 g_1,\ \partial_2 g_1,\ \partial_3 g_1,\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

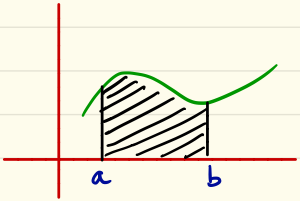
$$\nabla G_2 = \left(0,\ 0,\ 0,\ \partial_1 g_2,\ \partial_2 g_2,\ \partial_3 g_2\right)$$

$$\begin{cases} x-u = \lambda_1 \partial_1 g_1(x,y,z) = -\lambda_2 \partial_1 g_2(u,v,w) \\ y-v = \lambda_1 \partial_2 g_1(x,y,z) = -\lambda_2 \partial_2 g_2(u,v,w) \\ z-w = \lambda_1 \partial_3 g_1(x,y,z) = -\lambda_3 \partial_2 g_2(u,v,w) \\ g_1(x,y,z) = 0,\quad g_2(u,v,w) = 0 \end{cases}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیستم ۹۷/۲/۱۶

انتگرال :



مجموع ریمان $\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*)\,\Delta x_i = R(P,f)$

$\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ ، $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ ← یک افراز از بازه (a,b)

$x_i^* \in (x_i, x_{i+1})$

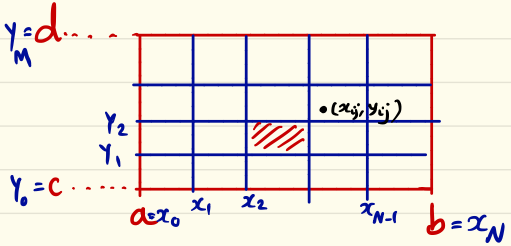
تعریف تابع انتگرال‌پذیر: مقدار I وجود داشته باشد که برای هر $\epsilon>0$ ، $\delta>0$ هرگاه $\max\limits_{0\le i\le N-1} \Delta x_i<\delta$

آنگاه

$$|R(P,f)-I|<\epsilon \,.$$

انتگرال تابع دو متغیره: فرض کنید $D=(a,b)\times(c,d)$ یک مستطیل باشد و $f: D\to \mathbb{R}$ تابع داده شده باشد.

حجم زیر نمودار $z=f(x,y)$ را به عنوان انتگرال تابع f روی مستطیل D تعریف می‌کنیم و با $\int_D f$ نشان می‌دهیم.



تقریب حجم زیر نمودار به کمک مجموع ریمان محاسبه می‌شود:

بازه‌های (a,b) و (c,d) را افراز می‌کنیم به زیربازه‌های

$$P = \left\{ \begin{array}{l} x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b \\ y_0 = c < y_1 < \cdots < y_{M-1} < y_M = d \end{array} \right\}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

ضخامت افراز P : $\|P\| = \max\limits_{\substack{0 \le i \le N-1 \\ 0 \le j \le M-1}} \{ \Delta x_i , \Delta y_j \}$

در هر مستطیل $R_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ یک نقطه دلخواه (x_{ij}, y_{ij}) را انتخاب کنید

مجموع ریمان متناظر این نقاط عبارت است از

$$R(f,P) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(x_{ij}, y_{ij}) \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{\text{مساحت مستطیل } R_{ij}}$$

تعریف: تابع f را روی مستطیل $D=(a,b)\times(c,d)$ انتگرال‌پذیر گوییم (یا به طور معادل حجم زیر نمودار آن قابل تعریف است)

هرگاه عدد I وجود داشته باشد که به ازای هر $\varepsilon>0$ مقدار δ وابسته به ε پیدا شود که

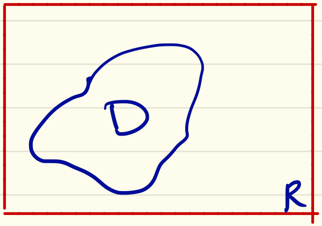
اگر برای افراز P داشته باشیم $\|P\|<\delta$ آنگاه

$$\left|R(f,P)-I\right|<\varepsilon$$

به ازای همه انتخاب‌های ممکن نقاط (x_{ij},y_{ij}).

مقدار I را انتگرال تابع f تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\int_D f\,dx\,dy=\int_D f\,dA=\int_D f=I$$



اگر دامنه تعریف تابع f یک ناحیه دلخواه D باشد (نه لزوماً یک مستطیل)

مستطیل R را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $D \subseteq R$ و تابع f را به صورت زیر

به R توسعه دهید:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

اگر تابع $\tilde{f}$ روی R انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f را روی D انتگرال‌پذیر گوییم و

$$\int_D f = \int_R \tilde{f}$$

سؤال: چرا تعریف بالا مستقل از انتخاب مستطیل R است؟ (تمرین)

انتگرال تابع سه‌متغیره :

فرض کنید تابع f در مکعب مستطیل $(a_0,a_1)\times(b_0,b_1)\times(c_0,c_1)$ تعریف شده باشد، حجم ۴-بعدی زیر نمودار $u=f(x,y,z)$ که به عنوان انتگرال سه‌متغیره تابع f تعریف می‌شود کاملاً به طور مشابه حالت دو متغیره قابل تعریف است.

$$\mathcal{P}=\left\{\begin{array}{l} a_0=x_0<x_1<\dots<x_N=a_1 \\ b_0=y_0<y_1<\dots<y_M=b_1 \\ c_0=z_0<z_1<\dots<z_P=c_1 \end{array}\right\}$$

$$(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})\in R_{ijk}=(x_i,x_{i+1})\times(y_j,y_{j+1})\times(z_k,z_{k+1})$$

$$\text{مجموع ریمان}\quad R(f,\mathcal{P})=\sum_{\substack{0\le i\le N-1\\ 0\le j\le M-1\\ 0\le k\le P-1}} f(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})\times\underbrace{\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k}_{\text{حجم } R_{ijk}}$$

خواص انتگرال :

① اگر مساحت ناحیه D صفر باشد، آنگاه $\int_D f = 0$.

② مساحت ناحیه D $= \int_D 1$. (اگر $D \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد، $\int_D 1$ برابر حجم n-بعدی ناحیه D است)

③ $$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$$

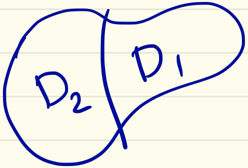
④ $\int_D cf = c \int_D f$ به ازای هر عدد حقیقی $c \in \mathbb{R}$.

⑤ اگر $f \geq 0$ آنگاه $\int_D f \geq 0$.

۶) اگر $f \le g$ آنگاه $\int_D f \le \int_D g$

۷) اگر f در یک ناحیهٔ بسته و کران‌دار D که مرزش از تعداد متناهی خم به طول متناهی تشکیل شده است، پیوسته باشد آنگاه f بر D انتگرال‌پذیر است.

۸) اگر ناحیهٔ D به دو ناحیهٔ D_1 و D_2 تجزیه شود که D_1 و D_2 تنها در مرز مشترک باشند و تابع f روی نواحی D_1 و D_2 انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی D نیز انتگرال‌پذیر است و



$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$$

(۹) (قضیهٔ مقدار میانگین): هرگاه D یک ناحیهٔ بسته، کران‌دار و همبند باشد و f یک تابع پیوسته روی D آنگاه نقطهٔ $(x_0,y_0)\in D$ وجود دارد که

$$f(x_0,y_0)=\frac{\int_D f}{D \text{ مساحت}}$$

<u>تعریف همبندی</u>: ناحیهٔ D را همبند گوییم هرگاه هر دو نقطهٔ آن را بتوان با یک منحنی پیوسته به هم وصل کرد.

تذکر: تمام خواص نه گانه فوق قابل تعمیم به توابع n متغیره و انتگرال آنها است.

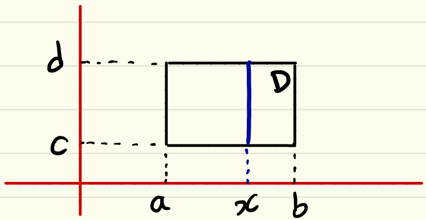
روش محاسبه انتگرال :

تاکنون به کمک خاصیت ۲ می‌توان انتگرال توابع ثابت را محاسبه کرد. اگر $f(x,y)=k$ تابع ثابت باشد آنگاه

$$\int_D f = k \times (D \text{ مساحت})$$

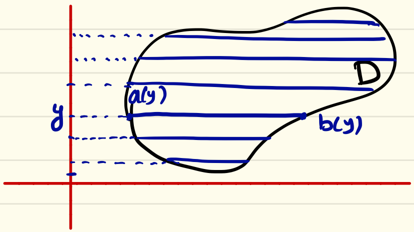
اگر تابع f کمی پیچیده‌تر باشد، مثلاً تابعی باشد که تنها به x وابسته است یعنی $f(x,y)=g(x)$

و در ضمن فرض کنید D یک مستطیل باشد آنگاه،



$$\int_D f = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \times (d-c)$$

برای اینکه دلیل تساوی بالا روشن شود، حجم زیر نمودار تابع f روی ناحیه D یک استوانه است در راستای محور y ها که سطح مقطع آن ناحیه زیر نمودار تابع g در بازه (a,b) است. (به کمک مجموع ریمان نیز می‌توان این تساوی را اثبات کرد (تمرین))



$$(a(y_0), b(y_0)) = \{ x : \ | \ (x, y_0) \in D \}$$

$$h(y) := \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \rightsquigarrow$$ تقریب مجموع ریمان در مستطیل‌های حول نقطه y

جمع به ازای yهای مختلف معادل $\int_c^d h(y)\,dy$ است.

به طور خلاصه: $$\int_D f(x,y) = \int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

خاصیتِ فوبینی: اگر ناحیه D در مستطیل $(a,b)\times(c,d)$ قرار بگیرد و به ازای هر

$y_0\in(c,d)$ اشتراک D با خط $y=y_0$ بازه $(a(y_0),\,b(y_0))$ باشد، آنگاه

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d h(y)\,dy$$

که

$$h(y_0):=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)\,dx$$

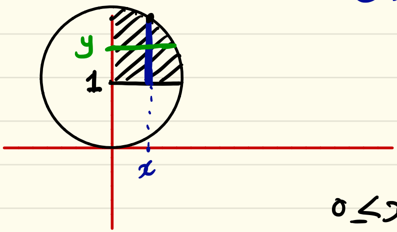
به طور معادل اگر به ازای هر $x_0\in(a,b)$ اشتراک D با خط عمودی $x=x_0$ بازه $(c(x_0),d(x_0))$ باشد، آنگاه

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b g(x)\,dx$$

که

$$g(x_0):=\int_{c(x_0)}^{d(x_0)} f(x_0,y)\,dy$$

یادآوری : خاصیتِ توبینی تعمیمی از همان اصل کاوالیری است که در ریاضی ۱ گفته شده است.



مثال : $f(x,y)=x$ ، و D ناحیهٔ هاشور زده در شکل مقابل.

$$0\le x\le 1 \Rightarrow 1\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}$$

$$\int_D f = \int_0^1 \left[\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \underbrace{f(x,y)}_{x}\,dy\right] dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\times x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\left[\sin 3\theta+\sin\theta\right]d\theta = -\left[\frac{1}{12}\cos 3\theta+\frac{1}{4}\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$1 \leq y \leq 2 \quad , \qquad 0 \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \underbrace{f(x,y)}_{x} \, dx \right] dy$$

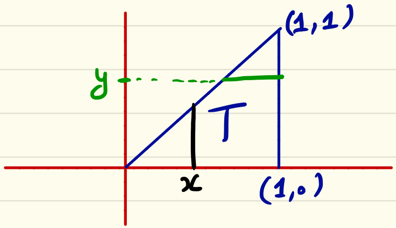
$$= \int_1^2 \frac{1}{2}\left(1-(y-1)^2\right) dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و یکم ۹۷/۲/۱۸

مثال‌هایی از محاسبه انتگرال:

مثال:



$$\int_T xy\, dx dy$$

$$0 \leq x \leq 1 \ , \quad 0 \leq y \leq x$$

محاسبه به کمک برش‌های عمودی $\Rightarrow$

$$\int_T xy\, dx dy = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^x xy\, dy}_{\text{تابعی بر حسب } x}\Big] dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x y^2 \Big|_0^x dx = \frac{1}{8} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

$$0 \leq y \leq 1 \ , \quad y \leq x \leq 1$$

محاسبه به کمک برش‌های افقی

$$\Rightarrow \int_T xy\, dx dy = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_y^1 xy\, dx}_{\text{تابعی بر حسب } y}\Big] dy = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2} y x^2 \Big|_{x=y}^1}\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} y^3\, dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

مثال:

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (2+x-\sin z)\, dV$$

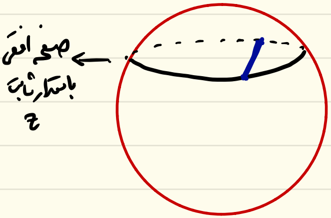
راه حل ساده: چون توابع x و $\sin z$ فرد هستند و ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و z متقارن است نتیجه می‌شود که

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} x\, dV = \int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \sin z\, dV = 0$$

در نتیجه حاصل انتگرال برابر است با:

$$= 2\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} dV = 2\times(\text{حجم کره}) = \frac{8}{3}\pi R^3$$

راه حل سخت به کمک فوبینی:



$$-R\le z\le R$$

$$-\sqrt{R^2-z^2}\le y\le\sqrt{R^2-z^2}$$

$$-\sqrt{R^2-y^2-z^2}\le x\le\sqrt{R^2-y^2-z^2}$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} x\, dV = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} x\, dx\right)}_{\text{تابعی برحسب } y \text{ و } z} dy\right] dz = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} (\ 0\ )\, dy\right] dz = 0$$

$$\int \sin z \, dV = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sin z \, dz \right)}_{=0} dy\, dx = 0$$

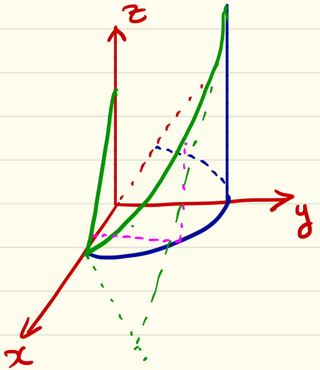
تذکر: قضیهٔ فوبینی برای محاسبهٔ انتگرال n متغیره دقیقاً مشابه دو متغیره برقرار است. اگر دامنهٔ انتگرال با نابرابری‌های زیر مشخص شوند:

$$\begin{cases} \alpha_1 \le x_1 \le \beta_1 \\ \alpha_2(x_1) \le x_2 \le \beta_2(x_1) \\ \alpha_3(x_1, x_2) \le x_3 \le \beta_3(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \alpha_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \le x_n \le \beta_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

آنگاه، انتگرال با محاسبهٔ n انتگرال یک متغیره به دست می‌آید:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\cdots \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} \left[\int_{\alpha_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\beta_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right] dx_{n-1} \right] \cdots \, dx_1$$

مثال: حجم جسمی که به صفحات $y=0$ ، $z=0$ و $z=a-x+y$ و استوانه سهموی $y=a-\frac{x^2}{a}$ محدود است را پیدا کنید.



$$-a \le x \le a$$

$$0 \le y \le a-\frac{x^2}{a}$$

$$0 \le z \le a-x+y$$

$$\text{حجم} = \int dV = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-x^2/a}\int_{0}^{a-x+y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-x^2/a} (a-x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left[(a-x)y+\frac{1}{2}y^2\right]\Bigg|_{y=0}^{a-x^2/a} dx = \int_{-a}^{a} \frac{(a-x)(a^2-x^2)}{a} + \frac{1}{2}\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^2 dx$$

مثال: حجم اشتراک سهمی‌گون بیضوی $z \ge x^2+y^2$ و استوانه $x^2+(z-2)^2 \le 1$ را محاسبه کنید.

$$-1 \le x \le 1$$

$$\left(2-\sqrt{1-x^2} \le z \le 2+\sqrt{1-x^2}\right) \cap \left(z \ge x^2 \right)$$

$$-\sqrt{z-x^2} \le y \le \sqrt{z-x^2}$$

(نامساوی $x^2 \le 2-\sqrt{1-x^2}$ همیشه برقرار است.)

$$\text{حجم} = \int_{-1}^{1} \int_{2-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\, dz\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{2-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{z-x^2}\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3} (z-x^2)^{3/2} \Big|_{z=2-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}} dx$$

انتگرال‌های مجازی : (ناحیه بیکران یا تابع بیکران)

فرض کنید f یک تابع نامنفی باشد و ناحیه انتگرال‌گیری D بیکران باشد که از حد دنباله نواحی کران‌دار D_n به دست می‌آید

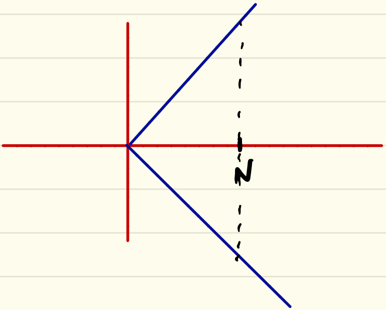
اگر دنباله انتگرال‌های $\int_{D_n} f$ دارای حد باشد، آنگاه

$$\int_D f := \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$$

شرط $f \geq 0$ تضمین می‌کند که این حد مستقل از انتخاب نواحی D_n است. اگر مقدار این حد متناهی شود انتگرال را
و آنرا گوییم.

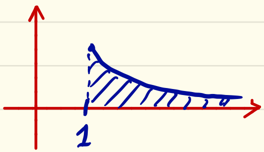
در حالت کلی (بدون شرط $f \geq 0$) در صورتی انتگرال تعریف می‌شود که $\int_D |f|$ همگرا (کران‌دار) باشد.

$$\int_R e^{-x^2}\, dA \qquad . \; R = \{(x,y) : x \geq 0 \,,\, -x \leq y \leq x\}$$ مثال:



$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \int_{-x}^{x} e^{-x^2}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N 2x e^{-x^2}\, dx = \lim_{N\to\infty} \left(1 - e^{-N^2}\right) = 1$$



$$\int_D \frac{dA}{x+y} = ? \qquad D = \left\{(x,y) : 1 \leq x \,,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$ مثال:

$$= \int_1^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{x+y} \right) dx = \int_1^\infty \ln(x+y) \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^\infty \ln(x + 1/x) - \ln x \, dx$$

$$= \int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

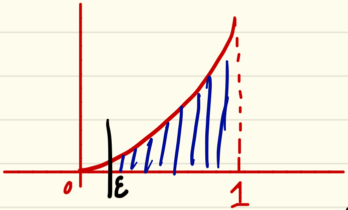
برای $0<\alpha$ ، $\ln(1+\alpha)<\alpha \Rightarrow$

مقایسه انتگرال $\Rightarrow$ انتگرال $\le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$

درنتیجه انتگرال $\int_D \frac{dA}{x+y}$ همگرا است.

<u>تابع بیکران و دامنه کران دار:</u>

فرض کنید f یک تابع <u>نامنفی</u> در دامنه کران دار D تعریف شده است و در نقطه‌ای $x_0\in\bar{D}$ تابع f بیکران می‌شود. دنباله همسایگی‌های B_n حول نقطه x_0 را در نظر بگیرید که دنباله نواحی $D-B_n$ به ناحیه D همگرا است. اگر دنباله انتگرال‌ها $\int_{D-B_n} f$ همگرا باشد، آنگاه $\int_D f$ همگرا است و برابر حد این دنباله تعریف می‌شود.



مثال: $0\le y\le x^2$ و $0\le x\le 1$

$$\int \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$$

تابع $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ در نقطه $(0,0)$ بیکران می‌شود. ناحیه انتگرال‌گیری از حد نواحی $\varepsilon\le x\le 1$ و $0\le y\le x^2$ به دست می‌آید.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\left(\int_{0}^{x^2}\frac{dy}{(x+y)^2}\right)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{-1}{x+y}\Bigg|_{y=0}^{x^2}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+x^2}\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{x\,dx}{x+x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(x+1)\Big|_{x=\varepsilon}^{1}=\ln 2$$

انتگرال بالا به $\ln 2$ همگراست.

تغییر متغیر در انتگرال :

قاعده تغییر متغیر یک بعدی :

$$\varphi : [\alpha,\beta] \xrightarrow{\text{مشتق پذیر}} [a,b]$$

$$\varphi' \geq 0 \quad , \quad a=\varphi(\alpha) \; , \; b=\varphi(\beta)$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\theta))\,\varphi'(\theta)\,d\theta$$

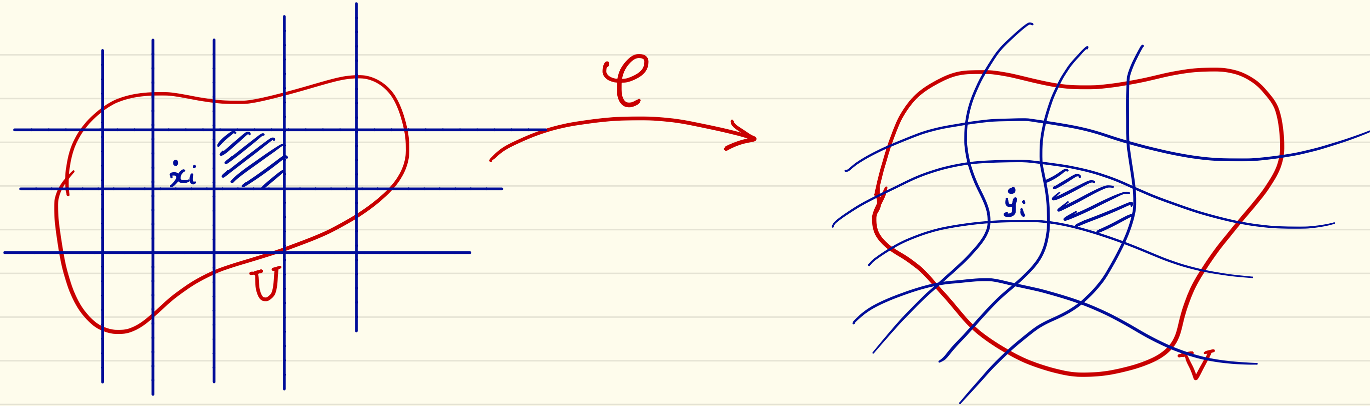
در ابعاد بالاتر :

$$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\varphi : U \longrightarrow V$ تابع مشتق پذیر با مشتقات پیوسته، یک به یک و پوشا و

به ازای هر $x \in U$ ، $\det D\varphi(x) \neq 0$ آنگاه

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x)) \underbrace{\left|\det D\varphi(x)\right|}_{\text{ژاکوبین تابع تغییر متغیر}} dx$$



$$\int_V f(y)\,dy \approx \sum_i f(y_i)\,\Delta V_i$$

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\det D\varphi(x)|\,dx \approx \sum_i f(\underbrace{\varphi(x_i)}_{y_i})\,|\det D\varphi(x_i)|\,\Delta U_i$$

$$\mathrm{vol}(\Delta V_i) = \mathrm{vol}\big(\varphi(\Delta U_i)\big) \approx \mathrm{vol}\big(D\varphi(x_i)(\Delta U_i)\big)$$

$$= |\det D\varphi(x_i)|\;\mathrm{vol}(\Delta U_i)$$

مثال: حجم بیضی‌وار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ را حساب کنید.

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} dx\,dy\,dz$$

$$\varphi(X,Y,Z)=(\underbrace{aX}_{x},\underbrace{bY}_{y},\underbrace{cZ}_{z})$$

$$=\iiint\limits_{X^2+Y^2+Z^2\leq 1} J\,dX\,dY\,dZ$$

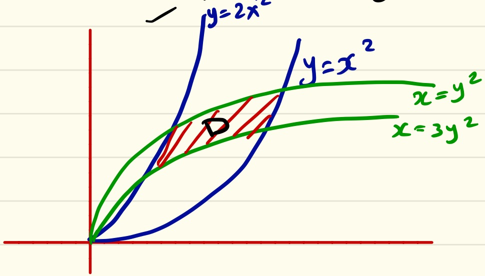
$$J=\left|\det D\varphi(X,Y,Z)\right|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}\right|=abc$$

$$\Rightarrow \quad \text{حجم}=\iiint\limits_{X^2+Y^2+Z^2\leq 1} abc\,dX\,dY\,dZ=\frac{4}{3}\pi abc$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و دو ۹۷/۲/۲۳

مثال: مساحت ناحیه بین سهمی‌های $y=x^2$ ، $y=2x^2$ ، $x=y^2$ و $x=3y^2$ را محاسبه کنید.



$$u=\frac{y}{x^2}\quad,\quad v=\frac{x}{y^2}$$

$$\varphi(x,y)=(u,v)$$

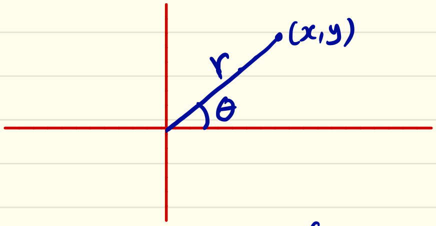
$$\varphi: D \longrightarrow [1,2]\times[1,3]$$

$$\iint_D dx\,dy=\iint_{\varphi(D)} J\,du\,dv \qquad J=\left|\det D\varphi^{-1}(u,v)\right|$$

$$\det D\varphi^{-1}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\begin{vmatrix}-\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{y^2} & -\frac{2x}{y^3}\end{vmatrix}^{-1}=\left(\frac{3}{x^2y^2}\right)^{-1}=\left(3u^2v^2\right)^{-1}$$

$$D \text{ مساحت } =\int_1^2\int_1^3\left(3u^2v^2\right)^{-1}dv\,du=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\Big|_1^2\right]\left[-\frac{1}{v}\right]_1^3$$

تغییر مختصات به قطبی :



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \int f\, J\, dr\, d\theta$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\theta}$$

مثال: حجم زیر نمودار $f(x,y)=1-x^2-y^2$ در دایره $x^2+y^2\le 1$.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\right)d\theta = 2\pi \times \frac{1}{4}$$

حل:

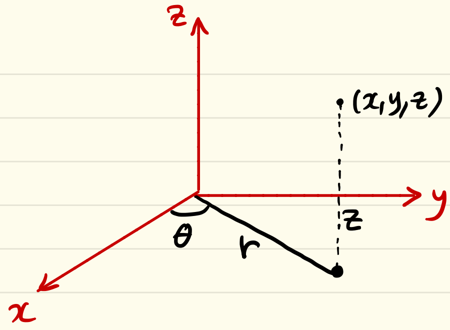
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \times -\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}$$

تغییر مختصات به استوانه‌ای :



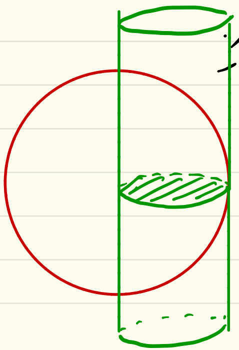
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$(r,\theta,z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

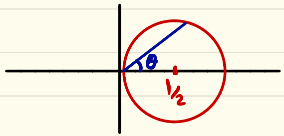
$$J = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

مثال : حجم درون کره $x^2+y^2+z^2 \le 1$ و استوانه $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \le \frac{1}{4}$ را به دست آورید



$$-\sqrt{1-r^2} = -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$$



$$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$
$$0 \le r \le \cos\theta$$

$$\text{حجم} = \iiint dx\,dy\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

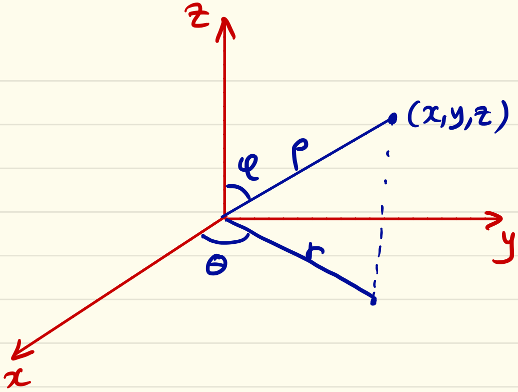
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos\theta} 2r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_{0}^{\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left|\sin\theta\right|^3 d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2} (\sin\theta)^3\,d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\int_{0}^{1} (1-u^2)\,du = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$$

تغییر مختصات به کروی :



$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$

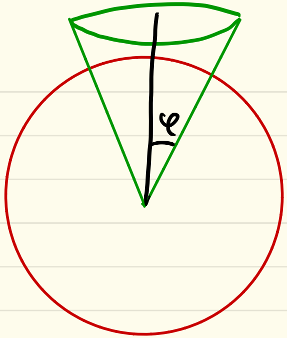
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$J = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin\varphi$$

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\theta}$$



مثال: حجم بین مخروط $\frac{1}{3}z^2 = x^2+y^2$ ، $z \geq 0$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ را محاسبه کنید.

$$0 \leq \rho \leq 1$$

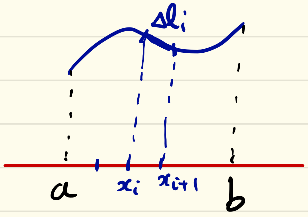
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \tan^{-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \pi/6$$

$$\iiint dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = \left[-\cos\varphi \Big|_0^{\pi/6}\right] \times 2\pi \times \left[\frac{1}{3}\rho^3 \Big|_0^1\right]$$

$$= \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \frac{2\pi}{3}$$

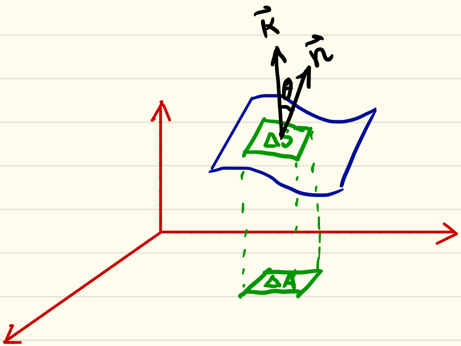
مساحت رویه :



یادآوری محاسبه طول نمودار : $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Δl_i پاره خط واصل بین دو نقطه $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ است.

$$(\Delta l_i)^2 \approx (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

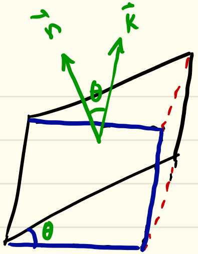


$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) \approx f'(x_i)\,.\,\Delta x_i$$

مساحت سطح نمودار تابع $z = f(x,y)$

$$Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta S \approx Df(x_0,y_0)\,(\Delta A)$$



مساحت مستطیل مشکی $\times \cos\theta =$ مساحت مستطیل آبی

$$\Rightarrow \Delta S \approx Df(x_0,y_0)(\Delta A) = \frac{\Delta A}{\cos\theta}$$

$$\vec{n} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1) \quad , \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2+1}}$$

مساحت نمودار $= \iint dS = \iint \sqrt{(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2+1}\ \underbrace{dA}_{dxdy}$

مثال: مساحت سطحی از هذلولوی $z = x^2 - y^2$ که در داخل استوانه $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد.

$$\iint_{x^2+y^2\le a^2} \text{عنصر سطح}\ dxdy = \iint \sqrt{1+|\nabla f|^2}\ dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dxdy = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}\ r\,d\theta\,dr$$

$$= 2\pi \, \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} \left(1+4r^2\right)^{3/2} \Big|_0^a$$

رویه هموار: $W \subseteq \mathbb{R}^2$ را ناحیه باز درنظر بگیرید، تصویر نگاشت $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ یک رویه دو بعدی هموار گوییم اگر $\varphi(u,v)$ مشتق‌پذیر باشد و φ_u و φ_v هم‌راستا نباشند. یا به عبارتی $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$.

نکته: شرط $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ معادل این است که تصویر نگاشت φ در همسایگی هر نقطه نمودار یک تابع باشد.

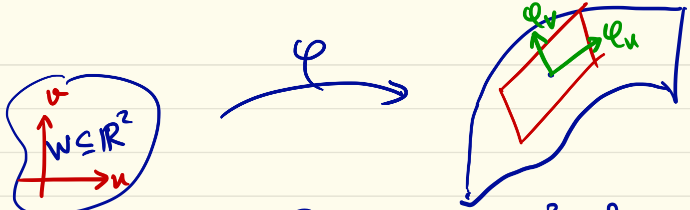
$$\varphi(u,v) = (x,y,z)$$

بنابر قضیه تابع ضمنی برای اینکه $z = \psi(x,y)$ باشد باید $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ وارون‌پذیر باشد.

که دترمینان این ماتریس مؤلفه سوم $\varphi_u \times \varphi_v$ است.

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \vec{i} - \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \vec{k}$$

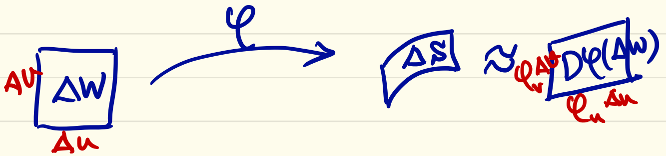
وقتی $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ یکی از سه مؤلفه فوق ناصفر است و در نتیجه می‌توان یکی از سه متغیر (x,y,z) برحسب دوتای دیگر نوشت.



φ_u و φ_v دو بردار مماس بر رویه هموار است که به یک نگاشت $\varphi: W \to \mathbb{R}^3$ به دست آمده است.

در نتیجه $\varphi_u \times \varphi_v$ بردار عمود بر این رویه است.

محاسبه عنصر سطح:



$$\text{سطح} = \sum \Delta S = \sum \varphi(\Delta W) \approx \sum D\varphi(\Delta W)$$

$\Delta W = \Delta u \times \Delta v$, $D\varphi(\Delta W) =$ مساحت متوازی الاضلاع به دست آمده با φ_u و φ_v

$= |\varphi_u \times \varphi_v| \, \Delta u \, \Delta v$ (یادآوری: مساحت متوازی الاضلاع به دست آمده با بردارهای $\vec{\xi}$ و $\vec{\eta}$ برابر است با $|\vec{\xi} \times \vec{\eta}|$)

جمع‌بندی:

$$\text{مساحت رویه} = \iint_W |\varphi_u \times \varphi_v| \, du\,dv$$

تذکر: رابطه بالا را مقایسه کنید با فرمول محاسبه طول خم برای یک پرمایش دلخواه $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ که عبارتست از

$$\int_I |\gamma'(t)| \, dt$$

مشابه محاسبه طول خم که فرمول اخیر مستقل از انتخاب پرمایش است، مساحت رویه نیز به انتخاب پرمایش وابسته نیست. یعنی اگر پرمایش دیگری شامل $\varphi : W \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ که $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ و φ هر دو مشتق‌پذیر و یک به یک باشند که $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ و $\psi_u \times \psi_v \neq 0$ و $\varphi(W) = \psi(U)$ آنگاه

$$\iint_W |\varphi_u \times \varphi_v| \, du\,dv = \iint_U |\psi_u \times \psi_v| \, du\,dv$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و سه ۹۷,۲,۲۵

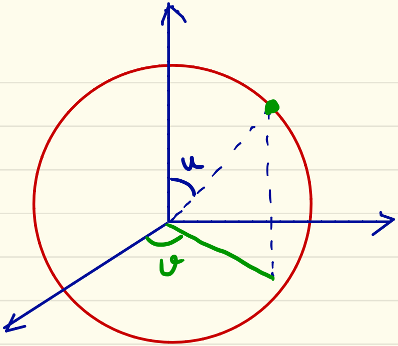
مثال: اگر رویه‌ی $z=f(x,y)$ در نظر بگیریم که $f: U\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

$$\varphi_u = (1, 0, f_u) \quad , \quad \varphi_v = (0, 1, f_v)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-f_u, -f_v, 1) \Rightarrow |\varphi_u \times \varphi_v| = \sqrt{1+|\nabla f|^2}$$

مساحت نمودار تابع $= \displaystyle\iint_U |\varphi_u \times \varphi_v| \, du\, dv = \iint_U \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, du\, dv$



مثال: مساحت کره به شعاع R. $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\varphi(u,v)=(R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u)$$

$$0\le u\le \pi\ ,\quad 0\le v\le 2\pi$$

$$\varphi_u=(R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ -R\sin u)$$

$$\varphi_v=(-R\sin u\sin v,\ R\sin u\cos v,\ 0)$$

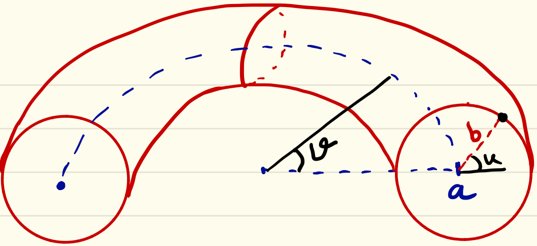
$$\varphi_u\times\varphi_v=(R^2\sin^2 u\cos v,\ R^2\sin^2 u\sin v,\ R^2\sin u\cos u)$$

$$|\varphi_u\times\varphi_v|=\left[R^4\sin^4 u+R^4\sin^2 u\cos^2 u\right]^{1/2}=R^2\sin u$$

دقت کنید که تنها در دو نقطه $u=0,\pi$ عبارت $\varphi_u\times\varphi_v$ برابر صفر می‌شود. لذا نقاط تکینِ پارامتری‌سازی برای کره همان دو نقطه $(0,0,\pm1)$ است.

$$\text{مساحت کره}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}R^2\sin u\,dv\,du=4\pi R^2$$

شکل: مساحت چنبره : دوران دایره حول مبدأ.



$$\varphi(u,v) = \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)$$

$$0 \le u, v \le 2\pi \qquad b<a$$

$$\varphi_u = (-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$$

$$\varphi_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \big(-b(a+b\cos u)\cos u\cos v,\ -b(a+b\cos u)\cos u\sin v,\ -b(a+b\cos u)\sin u\big)$$

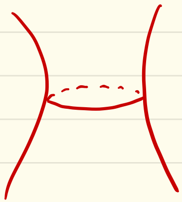
$$|\varphi_u \times \varphi_v| = b(a+b\cos u)$$

چون $b<a$ درنتیجه $|\varphi_u \times \varphi_v| \neq 0$.

$$\text{مساحت} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos u)\,du\,dv = 4\pi^2 ab$$

مثال:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



$$g(\varphi,\theta)=(a\cos\varphi\cosh\theta\,,\ b\sin\varphi\cosh\theta\,,\ c\sinh\theta)$$

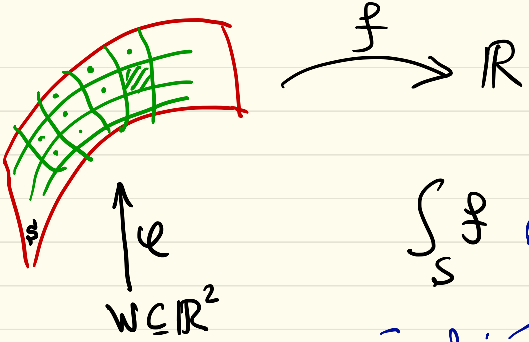
$$g_\varphi=(-a\sin\varphi\cosh\theta\,,\ b\cos\varphi\cosh\theta\,,\ 0)$$

$$g_\theta=(a\cos\varphi\sinh\theta\,,\ b\sin\varphi\sinh\theta\,,\ c\cosh\theta)$$

از مقایسهٔ مؤلفهٔ سوم این بردار می‌توان دید که g_φ و g_θ هم‌راستا نیستند و در نتیجه g یک پارامتری‌سازیِ هموار برای هذلولی‌گون است.

$$g_\varphi\times g_\theta=(bc\cosh^2\theta\cos\varphi\,,\ ac\cosh^2\theta\sin\varphi\,,\ -ab\sinh\theta\cosh\theta)$$

انتگرال یک تابع روی رویه:



$$\int_S f \approx \sum_i f(x_i)\,\Delta S_i$$

مجموع ریمان برای تابع که روی رویه S تعریف شده است.

تنها چالش محاسبه این انتگرال محاسبه مساحت ΔS_i است. برای این کار یک پرمایش هموار

$\varphi : W \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر گرفته و در این صورت

$$\Delta S_i = |\varphi_u \times \varphi_v|\,\Delta u\,\Delta v$$

درنتیجه

$$\int_S f = \int_W f(\varphi(u,v))\,|\varphi_u \times \varphi_v|\,du\,dv$$

نکته: رابطه بالا به انتخاب پرمایش φ وابسته نیست.

مثال: یک جسم به شکل نیم‌کره که با چگالی یکنواخت درست شده است در نظر بگیرید. مرکز جرم این جسم را به دست آورید.

مختصات مرکز جرم $= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x}{\iint_S 1}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y}{\iint_S 1}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z}{\iint_S 1}$$

آن نیم‌کره S را با $x^2+y^2+z^2=R^2$ با $z \geq 0$ در نظر بگیریم که واضح است که $\bar{x}=\bar{y}=0$ (به علت تقارن)

پارامتری: $\varphi(u,v) = (R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u)$

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = R^2 \sin u \qquad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq \pi/2$$

$$\iint_S z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R\cos u\, |\varphi_u \times \varphi_v|\, du\, dv = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{\pi R^3/2}{2\pi R^2} = \frac{R}{4}$$

مثال: مرکز مخروط $\quad z^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad 0 \le z \le 1$

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z \, dS}{\iint_S 1 \, dS}$$

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad , \quad 0 \le r \le 1$$

$$\varphi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

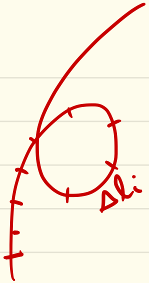
$$\varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \varphi_r \times \varphi_\theta = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r)$$

$$|\varphi_r \times \varphi_\theta| = \sqrt{2}\, r$$

$$\iint_S z \, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, |\varphi_r \times \varphi_\theta| \, dr d\theta = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\iint_S ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\varphi_r \times \varphi_\theta| \, dr d\theta = \pi\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 2/3$$



انتگرال روی خم: خم $\gamma:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^3$ و $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

$$\int_\gamma f = \sum f(\gamma(t_i))\,\Delta l_i \approx \sum f(\gamma(t_i))\,|\gamma'(t_i)|\,\Delta t_i$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

دقیقاً شبیه انتگرال روی سطح ، انتگرال روی خم نیز تعریف می‌شود و مقدار این انتگرال مستقل از انتخاب پارامتر است.

مثال: مرکز نیم دایره $x^2+y^2=R^2$ و $y>0$.

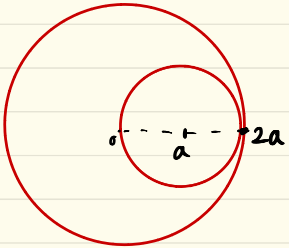
$$\gamma(t)=(R\cos t,\ R\sin t) \qquad 0\le t\le \pi$$

$$\int_\gamma y = \int_0^\pi R\sin t\,|\gamma'(t)|\,dt = 2R^2$$

$$\int_\gamma 1 = \int_0^\pi |\gamma'(t)|\,dt = R\pi$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{y} = \frac{2R^2}{R\pi} = \frac{2}{\pi}R$$

مثال: مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2ay$ که داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ قرار گرفته است.



برای محاسبه مساحت باید

$$\int_{\text{دایره}} 2z\, d\sigma$$

که $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$

پریش $\gamma(t)=(a\cos t\,,\, a+a\sin t)$ را برای دایره در نظر می‌گیریم.

$$\int 2z\, d\sigma = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{4a^2-a^2\cos^2 t-a^2(1+\sin t)^2}\;|\gamma'(t)|\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2a^2-2a^2\sin t}\;a\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\,a^2\sqrt{1-\sin t}\;dt$$

مثال: مساحت جانبی تقاطع دو استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ را بدست آورید.

مثل این است که روی دایره $x^2+y^2=1$ حصاری کشیده‌ایم با ارتفاع $-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}$

$$\int_{x^2+y^2=1} 2\sqrt{1-x^2}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{1-\cos^2 t}\ \underbrace{1}_{\text{عنصر طول}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin t|\,dt$$

$$= 8$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و چهار ۹۷/۲/۳۰

میدان برداری

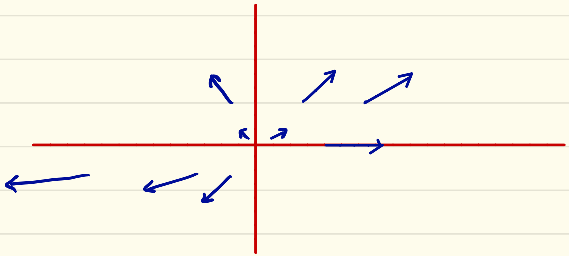
هر تابع $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را میدان برداری گوییم که در هر نقطه‌ای از U بردار $F(x)$ را نسبت می‌دهد.

در مقابل آن هر تابع $g: U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را اسکالر گوییم.

مثال: میدان‌های برداری $\vec{i}(x,y,z) := (1,0,0)$ ، $\vec{j}(x,y,z) = (0,1,0)$ و $\vec{k}(x,y,z) = (0,0,1)$ میدان‌های برداری ثابت هستند.

اگر $F = (F_1, F_2, F_3)$ باشد می‌توان نوشت $F = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$

مثال: $F = x\vec{i} + y\vec{j}$



تعریف: منحنی $\gamma: I\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را خم انتگرال گوییم هرگاه در هر نقطه $\gamma(t)$ داشته باشیم

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t))$$

اگر F میدان برداری سرعت یک سیال باشد آنگاه $\gamma(t)$ مسیر حرکت یک ذره را نشان می‌دهد که در نقطه $\gamma(0)=x_0$ رها شده است.

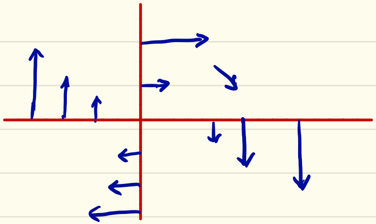
تذکر: تصویر خم انتگرال تنها به جهت میدان برداری F وابسته است نه به اندازه آن. در واقع اگر $\eta: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ خمی باشد که در هر نقطه مماس بر میدان برداری F است یعنی $\eta'(t) \parallel F(\eta(t))$ (یا به عبارتی $\eta'(t)=k(t)F(\eta(t))$) آنگاه η یک بازپرمایش از γ است. (تمرین: این مطلب را اثبات کنید)

مثال:

$$F = y\vec{i} - x\vec{j}$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

$$\dot{\gamma} = F(\gamma(t)) = \gamma_2\vec{i} - \gamma_1\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 \\ \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1 \end{cases}$$



$$\gamma_1(t) = c\,\sin(t+\omega) \quad , \quad \gamma_2(t) = c\,\cos(t+\omega)$$

$$\gamma(0) = (x_0, y_0) \Rightarrow c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad , \quad \tan\omega = \frac{x_0}{y_0}$$

<u>میدان گرادیان</u>: اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ آنگاه $F = \nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک میدان برداری است که به آن میدان گرادیان گوییم. تابع f را <u>پتانسیل</u> میدان می‌نامیم.

$$F = (F_1, \dots, F_n) \Rightarrow F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

خم انتگرال یک میدان گرادیان همواره بر سطوح تراز پتانسیل f عمود است و در راستای خم انتگرال مقدار پتانسیل افزایش پیدا می‌کند.

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t))$$

$$\frac{d}{dt}\Big(f(\gamma(t))\Big) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = |\nabla f(\gamma(t))|^2 \geq 0$$

سؤال: آیا میدان برداری $F(x,y)=(x,y)$ یک میدان گرادیان است؟

$$F=\nabla f \Rightarrow x=\partial_1 f\ ,\quad y=\partial_2 f$$

$$\int x\,dx=\int \partial_1 f\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}x^2=f(x,y)+h(y) \xrightarrow{\partial_2} 0=\partial_2 f+h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y)=-y \Rightarrow h(y)=-\tfrac{1}{2}y^2+c$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c$$

سؤال: آیا میدان برداری $F=(-y,x)$ میدان گرادیان است؟

$$F=\nabla \varphi \Rightarrow -y=\partial_1\varphi\ ,\quad x=\partial_2\varphi$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-1=\partial_2\partial_1\varphi \qquad 1=\partial_1\partial_2\varphi$$

میدان F گرادیان نیست.

گزاره: اگر میدان برداری F گرادیان باشد باید $\partial_i F_j = \partial_j F_i$.

اثبات:

$$F=\nabla\varphi \Rightarrow F_i=\partial_i\varphi \Rightarrow \partial_j F_i = \partial_j\partial_i\varphi = \partial_i\partial_j\varphi = \partial_i F_j$$

سوال: آیا شرط بالا کافی است؛ یعنی اگر F در رابطه $\partial_i F_j=\partial_j F_i$ صدق کند آیا می‌توان نتیجه گرفت که F میدان گرادیان است؟

مثال: $F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

$$\theta(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\partial_x\theta = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad , \quad \partial_y\theta = \frac{x}{x^2+y^2}$$

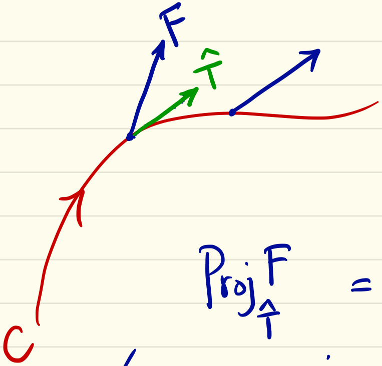
تابع θ در $\mathbb{R}^2-\{(x,0): x\ge 0\}$ مشتق‌پذیر است و مشتقاتش از رابطه بالا به دست می‌آید.

در واقع داریم $F=\nabla\theta$ در $\mathbb{R}^2-\{(x,0):x\ge 0\}$. ولی میدان F در $\mathbb{R}^2$ میدان گرادیان نیست.

$$F=\nabla\varphi \Rightarrow \nabla(\varphi-\theta)=0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2-\{(x,0):x\ge 0\}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi - \theta = C = \text{ثابت} \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \theta(x,y)}_{=2\pi} + C = \varphi(x,0) = \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \theta(x,y)}_{=0} + C$$



<u>تعریف کار</u>: اگر F میدان نیرو باشد و C مسیر حرکت یک جسم باشد.

$$\text{Proj}_{\hat{T}} F = (F \cdot \hat{T})\, \hat{T}$$

میزان کار = جابجایی × نیرو = $\text{Proj}_{\hat{T}} F$ × جابجایی

اگر $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک پارامتری C باشد و $\tilde{\gamma}$ پارامتری برحسب طول آن

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \hat{T} \quad \Rightarrow \quad \text{جابجایی} = \hat{T}(s)\, \Delta s \quad \Longrightarrow \quad \text{کار} = \sum \text{Proj}_{\hat{T}} F \cdot \hat{T}(s)\, \Delta s$$

$$= \sum (F \cdot \hat{T})\, \Delta s$$

$$\text{کار} = \int (F\cdot\hat{T})\, ds = \int_a^b (F\cdot\hat{T})\, |\gamma'(t)|\, dt$$

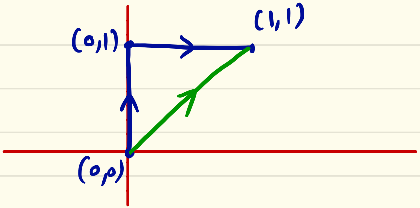
در واقع انتگرال فوق انتگرال تابع $F\cdot\hat{T}$ روی خم C . به همین دلیل میزان کار را با انتگرال

$$\oint_C F\cdot\hat{T} = \oint_C F\cdot d\vec{r} = \oint_C F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n$$

نشان می‌دهیم. که برای محاسبه انتگرال‌های فوق باید ابتدا یک پارامتریش شکل $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ گرفت و در این صورت

اگر $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ آنگاه

$$\oint_C F\cdot dr = \int \big(\underbrace{F_1\gamma_1' + \cdots + F_n\gamma_n'}_{F\cdot\gamma'}\big)\, dt$$



مثال- $F = y^2 \vec{i} + 2xy \vec{j}$

الف) مقدار کار انجام روی مسیر حرکت آبی رنگ؟

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,t) & 0 \le t \le 1 \\ (t-1,1) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\oint_C F \cdot d\vec{r} = \int_0^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 F(0,t) \cdot (0,1)\, dt + \int_1^2 F(t-1,1) \cdot (1,0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2,0) \cdot (0,1)\, dt + \int_1^2 (1, 2(t-1)) \cdot (1,0)\, dt$$

$$= 1$$

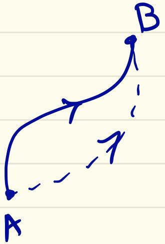
ب) مقدار کار انجام شده روی مسیر سبز رنگ.

$$\eta(t) = (t,t) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\oint F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt = \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1,1)\, dt = 1$$

<u>نکته</u>: اگر F میدان گرادیان باشد، آنگاه مقدار کار به مسیر حرکت وابسته نیست و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت وابسته است.

در حقیقت اگر $F=\nabla\varphi$ داریم



$$\oint_C F\cdot dr = \phi(B)-\phi(A)$$

زیرا اگر $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک پارامتریش برای C باشد آنگاه

$$\oint_C F\cdot dr=\int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dt}\big(\varphi(\gamma(t))\big)\,dt=\varphi(\underbrace{\gamma(b)}_{B})-\varphi(\underbrace{\gamma(a)}_{A})$$

<u>تعریف</u>: اگر میدان برداری F دارای این خاصیت باشد که مقدار کار مستقل از مسیر حرکت بوده و تنها به نقاط ابتدا و انتها وابسته باشد، آن را <u>میدان پایستار</u> یا <u>میدان بقا</u> می‌نامیم. در واقع اگر C یک خم بسته باشد، آنگاه

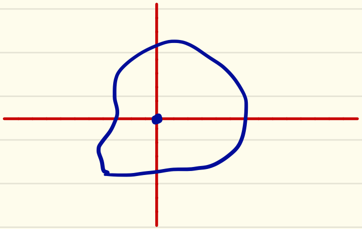
$$\oint_C F\cdot dr=0$$

وقتی F میدان پایستار است.

تعریف: ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را همبند گوییم هرگاه هر دو نقطه آن را بتوان با یک خم قطعه‌قطعه هموار در D به هم وصل کرد.

مثال- $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ همبند نیست. چون هر خمی که نقطه $(0,1)$ را به $(0,-1)$ وصل کند در یک جا باید محور xها را قطع کند. ولی ناحیه $\mathbb{R}^3 - \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ همبند است.

تعریف: ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را همبند ساده گوییم هرگاه هر خم بسته را بتوان بدون آنکه از D خارج شویم به یک نقطه منقبض کنیم.



مثال- $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ همبند ساده نیست. ولی $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ همبند ساده است.

قضیه: اگر U زیرمجموعه باز و همبند در $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف- میدان برداری F در U میدان گرادیان است.

ب- به‌ازای هر منحنی قطعه قطعه هموار بسته C در U،

$$\oint_C F.d\vec{r} = 0$$

(یعنی F میدان پایستار است)

ج- به‌ازای هر دو نقطه P_0 و P_1 در U مقدار انتگرال $\oint_C F.d\vec{r}$ به ازای همه مسیرهای هموار در U که از P_0 شروع و به P_1 ختم می‌شود، مقدار یکسان دارد.

اثبات- نقطه ثابت دلخواه P در U در نظر بگیرید و تابع $\varphi: U \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف کنید

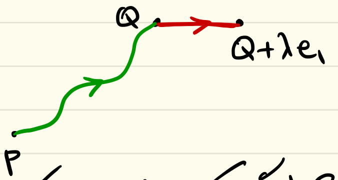
$$\varphi(Q) := \oint_C F.d\vec{r}$$

که C یک منحنی دلخواه در U است که P را به Q وصل می‌کند. بنابر خاصیت (ج) تابع φ خوش‌تعریف است.

کافی است نشان دهیم $F = \nabla\varphi$.

به عنوان مثال نشان می‌دهیم $\partial_1 \varphi = F_1$ که $F=(F_1,\dots,F_n)$.

$$\partial_1 \varphi(Q) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(Q+\lambda e_1) - \varphi(Q)}{\lambda}$$



خم دلخواه C را بگیرید که P را به Q وصل کند. بنا بر تعریف تابع φ :

$$\varphi(Q) = \oint_C F \cdot d\vec{r}$$

آن‌گاه پاره خط واصل بین Q تا $Q+\lambda e_1$ را به خم C اضافه کنیم و آن را C_1 بنامیم

$$\varphi(Q+\lambda e_1) = \oint_{C_1} F \cdot d\vec{r}$$

درنتیجه

$$\varphi(Q+\lambda e_1) - \varphi(Q) = \int_Q^{Q+\lambda e_1} F \cdot d\vec{r}$$

پاره خط واصل بین Q تا $Q+\lambda e_1$ را با تابع زیر پارامتریش کنید

$$\eta(t) = Q + t e_1 \qquad 0 \le t \le \lambda$$

$$\int_Q^{Q+\lambda e_1} F \cdot d\vec{r} = \int_0^\lambda F(\eta(t)) \cdot \underbrace{\eta'(t)}_{e_1}\, dt = \int_0^\lambda F_1(Q+te_1)\, dt$$

در نتیجه

$$\partial_1 \varphi(Q) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} F_1(Q+te_1) = F_1(Q)$$

مثال: میدان برداری

$$F = Ax\sin(\pi y)\,\vec{i} + (x^2\cos(\pi y) + Bye^{-z})\,\vec{j} + y^2e^{-z}\,\vec{k}$$

به ازای چه مقادیری از ثابت‌های A و B پایستار (تام) است؟ انتگرال $\int_C F\cdot dr$ وقتی C منحنی فصل مشترک سهمی‌گون $z=x^2+4y^2$ و صفحه $z=3x-2y$ در فاصله نقاط $(0,0,0)$ تا $(0,-\frac{1}{2},1)$ است.

بررسی می‌کنیم که رابطه $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ برقرار است یا خیر. (دقت کنید که این شرط لازم است)

$$F = Ax\sin(\pi y)\,\vec{i} + \left(x^2\cos(\pi y) + Bye^{-z}\right)\vec{j} + y^2e^{-z}\,\vec{k}$$

$$\partial_2 F_1 = Ax\pi\cos\pi y \quad , \quad \partial_1 F_2 = 2x\cos(\pi y) \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{2}{\pi}$$

$$\partial_1 F_3 = 0 \quad , \quad \partial_3 F_1 = 0$$

$$\partial_2 F_3 = 2ye^{-z} \quad , \quad \partial_3 F_2 = -Bye^{-z} \quad \Longrightarrow \quad B = -2$$

درنتیجه اگر F پایستار باشد باید $A = 2/\pi$ و $B = -2$. (شرط $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ شرط لازم است) برای اینکه F

پایستار باشد باید نشان دهیم پتانسیل φ وجود دارد که $F = \nabla\varphi$

$$F_1 = \partial_1\varphi \Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int F_1\,dx = \frac{1}{\pi}x^2\sin(\pi y) + h(y,z)$$

$$F_2 = \partial_2\varphi \Rightarrow x^2\cos\pi y - 2ye^{-z} = x^2\cos\pi y + \partial_y h \Rightarrow \partial_y h = -2ye^{-z}$$

$$\Rightarrow h(y,z) = \int -2ye^{-z}\,dy = -y^2e^{-z} + g(z)$$

$$F_3 = \partial_3\varphi \Rightarrow y^2e^{-z} = \partial_z h = y^2e^{-z} + g'(z) \Rightarrow g'(z) = 0 \Rightarrow g(z) = C$$ ثابت

$$F=\nabla\varphi \ , \qquad \varphi = \frac{1}{\pi}x^2\sin\pi y - y^2 e^{-z}$$

در نتیجه F یک میدان پایستار است.

(تذکر: در جلسات بعدی خواهیم دید که شرط $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ در نواحی همبند ساده برای اینکه F پایستار باشد کافی است.)

برای محاسبه $\oint_C F\cdot d\vec{r}$ چون F میدان پایستار است در نتیجه $\oint F\cdot dr = \varphi(0,-\frac{1}{2},1)-\varphi(0,0,0)$.

اگر بخواهیم مقدار انتگرال فوق را بدون محاسبه φ به دست آوریم می‌توان با توجه به اینکه F روی کل $\mathbb{R}^3$ پایستار است نتیجه گرفت که مقدار انتگرال مستقل از مسیر حرکت است و می‌توان به جای خم C از خط راست که از $(0,0,0)$ به $(0,-\frac{1}{2},1)$ می‌رود استفاده کرد.

$$\gamma(t)=(0,-t/2,t) \qquad 0\le t\le 1$$

$$\oint F\cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 -\frac{1}{2}F_2+F_3\,dt = \int_0^1 (y^2+y)e^{-z}\,dt$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{t^2}{4}-t/2\right)e^{-t}\,dt$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و پنج ۹۷/۳/۱

سؤال: شرط $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ در شرایطی برقرار شرط کافی برای پایستار بودن F باشد؟

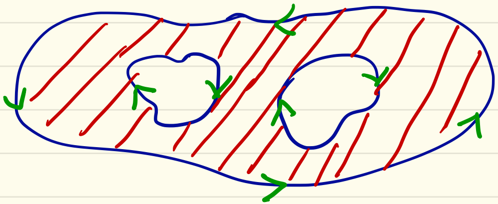
به عنوان مثال اگر F در صفحه تعریف شده باشد و همه جا داشته باشیم $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ ، آیا F میدان پایستار (گرادیان) است؟ بنا بر قضیه طلب قبل کافی است نشان دهیم در نواحی همبند ساده مقدار $\oint_C F.dr$ روی هر خم بسته برابر صفر است.

قضیه زیر این مطلب را در صفحه نشان می‌دهد:

قضیه گرین: فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحه باشد که مرز آن ∂R از تعداد متناهی خم قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و $F = (F_1, F_2)$ یک میدان برداری هموار بر R باشد. در این صورت

$$\oint_{\partial R} F.dr = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

نکته مهم: جهت ∂R در قضیه بالا بدین صورت قرارداد می‌شود که وقتی روی ∂R حرکت می‌کنیم دست چپ به سمت داخل ناحیه R باشد.



اگر در شکل روبرو R ناحیه هاشورزده باشد
مرز ∂R شامل سه تکه است که جهت آن
در شکل نشان داده شده است.

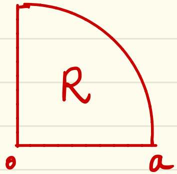
مثال: $F=(-y,x)$

$$\oint_{\partial R} F_1dx+F_2dy=\oint_{\partial R} F\cdot d\vec{r}=\iint_R (\underbrace{\partial_1F_2}_{1}-\underbrace{\partial_2F_1}_{-1})\,dxdy$$

$$=\iint_R 2\,dxdy = 2\times \text{مساحت } R$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } R=\frac{1}{2}\int_{\partial R} x\,dy-y\,dx$$

مثال:



$$\oint_{\partial R} \underbrace{(x-y^3)}_{F_1}dx + \underbrace{(y^3+x^3)}_{F_2}dy$$

$$= \iint_R (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\,dx\,dy = \iint_R 3x^2+3y^2\,dx\,dy$$

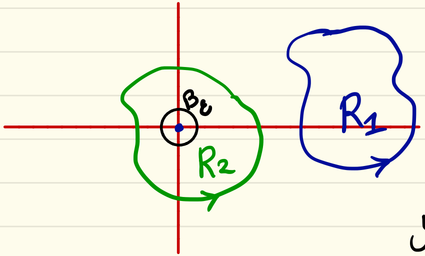
$$= \int_0^a \int_0^{\pi/2} 3r^2\, r\,d\theta\,dr = \frac{3\pi}{8}a^4$$

با مقایسه قضیه گرین و قضیه صفحه قبل نتیجه زیر برقرار است.

نتیجه: اگر Ω ناحیه باز و همبند ساده باشد و F میدان برداری با مشتقات پیوسته

F پایستار است $\iff$ $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ در داخل ناحیه Ω.

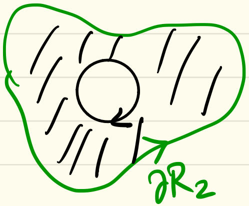
مثال: میدان برداری $F=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ در رابطه $\partial_1 F_2=\partial_2 F_1$ در ناحیه $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ صدق می‌کند. قبلاً دیدیم که این میدان در $\mathbb{R}^2$ پایستار نیست.



اگر R_1 یک ناحیه‌ای باشد که مبدأ در داخل ∂R_1 قرار ندارد (مانند شکل روبرو) چون F در همه‌جای R_1 تعریف شده است و R_1 یک ناحیه همبند ساده است بنابر نتیجه قبل F یک میدان پایستار داخل R_1 است. یعنی پتانسیل φ وجود دارد که در
$F=\nabla\varphi$ در داخل R_1.

اگر R_2 ناحیه‌ای باشد مبدأ داخل آن است چون F در $(0,0)$ تعریف نشده است و ناحیه $R_2-\{(0,0)\}$ همبند ساده نیست نمی‌توان از نتیجه قبل استفاده کرد. برای چنین ناحیه‌ای داریم
$$\oint_{\partial R_2} F_1dx+F_2dy=2\pi$$
زیرا اگر
$$B_\varepsilon=\{(x,y):\ x^2+y^2\le\varepsilon^2\}$$
قضیه گرین را برای ناحیه R_2-B_ε می‌نویسیم:

$$\oint_{\partial(R_2-B_\varepsilon)} F\cdot dr = \iint_{R_2-B_\varepsilon} (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dx\, dy = 0$$



مرز ناحیه R_2-B_ε شامل دو قسمت ∂R_2 و ∂B_ε است که باید جهت ∂B_ε در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفت.

$$0 = \oint_{\partial(R_2-B_\varepsilon)} F\cdot dr = \oint_{\partial R_2} F\cdot d\vec{r} + \oint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot d\vec{r}$$

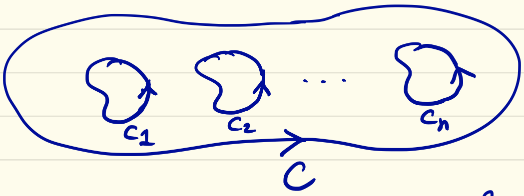
$$\Rightarrow \oint_{\partial R_2} F\cdot d\vec{r} = -\oint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial B_\varepsilon} F\cdot d\vec{r}$$

وقتی جهت حرکت
را برعکس کرده‌ایم

اگر الان ∂B_ε را در جهت عکس عقربه‌ای ساعت پارامتر کنیم مانند $\gamma(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t)$ خواهیم داشت

$$\oint_{\partial R_2} F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F_1(\gamma(t))(-\varepsilon \sin t) + F_2(\gamma(t))(\varepsilon \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-\varepsilon \sin t)^2 + (\varepsilon \cos t)^2}{\varepsilon^2}\, dt = 2\pi$$



نتیجه:

اگر ناحیه R مشابه شکل روبرو در بین خمهای C و C_1، ...، C_n قرار داشته باشد و در R داشته باشیم $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ در نتیجه

(دقت کنید جهت C_iها با خم C همان است)

$$\oint_C F\cdot dr = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} F\cdot dr$$

برای تعمیم این نتیجه به $\mathbb{R}^3$ $(\partial_i F_j = \partial_j F_i \Leftarrow F$ با پتانسیل است$)$ لازم است مفهوم شار را تعریف کنیم.

<u>تعریف شار:</u> اگر Γ یک رویه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد، شار گذرا از Γ را با مقدار انتگرال

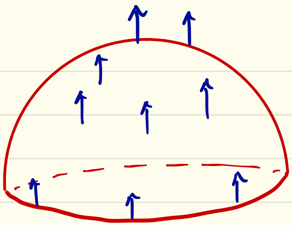
$$\iint_{\Gamma} F \cdot d\hat{S} = \iint_{\Gamma} (F \cdot \hat{N})\, ds$$

تعریف می‌شود که $d\hat{S}$ را عنصر سطح برداری Γ است که با ضابطه $d\hat{S} = \hat{N}\, ds$ نشان داده می‌شود. $\hat{N}$ بردار یکه عمود بر سطح Γ است و ds عنصر سطح Γ.

در جلسات قبل دیدیم که $\Gamma \longrightarrow \varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ یک پارامترسازی برای Γ باشد آنگاه

$$ds = |\varphi_u \times \varphi_v|\, du\, dv \quad , \quad \hat{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

$$\boxed{\iint_{\Gamma} (F \cdot \hat{N})\, ds = \iint_{\Omega} F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\, du\, dv}$$



مثال: $F = \vec{k}$ شار گذرا از نیمکره $x^2+y^2+z^2=R^2$ در $z\geq 0$ را حساب کنید.

$$\iint (\vec{k}\cdot\hat{N})\, ds$$

$$\varphi(u,v) = (R\sin u\cos v,\ R\sin u\sin v,\ R\cos u) \qquad 0\leq u\leq \pi/2,\ 0\leq v\leq 2\pi$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (R^2\sin^2 u\cos v,\ R^2\sin^2 u\sin v,\ R^2\sin u\cos u)$$

$$\iint(\vec{k}\cdot\hat{N})\,ds = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \vec{k}\cdot(\varphi_u\times\varphi_v)\,dv\,du = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^2\sin u\cos u\,dv\,du$$

$$= \pi R^2$$

محاسبه از راه دیگر:

$$\iint(\vec{k}\cdot\hat{N})\,ds = \iint \frac{z}{R}\,ds \quad \Leftarrow \quad \hat{N} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$$

برای محاسبه این انتگرال می‌توان نیمکره را به صورت نمودار تابع $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ در نظر گرفت

ریاضی عمومی ۲

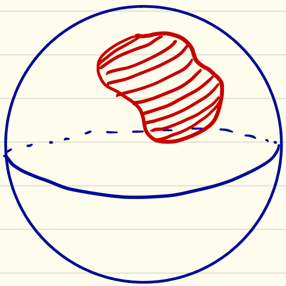
جلسه بیست و شش ۹۷/۳/۶

قضیه گرین: فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحه باشد که مرز آن ∂R از تعداد متناهی خم قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و

$F=(F_1,F_2)$ یک میدان برداری هموار بر R باشد. در این صورت

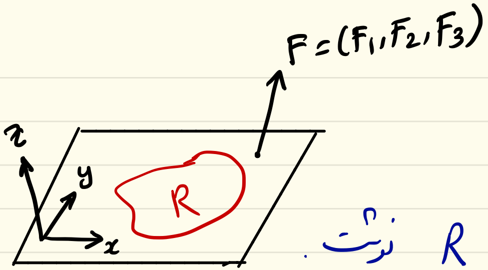
$$\oint_{\partial R} F.dr = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

تعمیم قضیه گرین در $\mathbb{R}^3$ (قضیه استوکس)



به عنوان مثال اگر R یک رویه دوبعدی در $\mathbb{R}^3$ باشد می‌توان

$\oint_{\partial R} F.dr$ را به کمک یک انتگرال روی رویه R بیان کرد؟



اولین گام: R را یک ناحیه سطح در داخل صفحه‌ای از $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم

اگر این صفحه همان صفحه (x,y) باشد به راحتی می‌توان قضیه گرین را برای R نوشت.

$G(x,y) = \left(F_1(x,y,0) \, , \, F_2(x,y,0) \right)$ قرار دهید

و قضیه گرین را برای میدان G بنویسید:

$$\int_{\partial R} G\cdot dr = \iint_R (\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1)\, dx\,dy$$

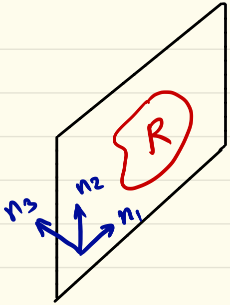
چون R داخل صفحه است در نتیجه مؤلفه سوم خم $\vec{r}(t)$ که پارامتریش ∂R باشد

صفر است یعنی $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$ در نتیجه

$$G\cdot dr = F\cdot dr$$

در واقع می‌توان نوشت

$$\int_{\partial R} F\cdot d\vec{r} = \iint_R (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dA$$



اگر صفحه‌ای که R داخل آن قرار دارد یک صفحه دلخواه باشد، پایه متعامد (n_1, n_2, n_3) برای فضا می‌گیریم که n_3 عمود بر این صفحه باشد و $n_3 = n_1 \times n_2$

اگر مختصات میدان F را در پایه جدید بنویسیم

$$F = G_1 \vec{n}_1 + G_2 \vec{n}_2 + G_3 \vec{n}_3$$

$$G_i = F \cdot \vec{n}_i$$

بنابراین می‌توان فرض کرد که ناحیه R در صفحه‌ای قرار دارد که عمود بر مؤلفه سوم مختصات است و قضیه گرین را ما به حالت تبدیل می‌توان نوشت :

$$\oint_{\partial R} G \cdot dr = \iint_R (\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1)\, dA$$

$$\partial_1 G_2 = \nabla G_2 \cdot \vec{n}_1 = n_1^t \nabla G_2 = n_1^t \nabla(F \cdot \vec{n}_2) = \underbrace{n_1^t}_{1\times 3} \underbrace{(DF)^t}_{3\times 3} \underbrace{n_2}_{3\times 1}$$

$$\partial_2 G_1 = \cdots = n_2^t (DF)^t n_1 = n_1^t \, DF \, n_2$$

$$\oint_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R n_1^t \left((DF)^t - DF \right) n_2 \, dA$$

$$DF = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \\ \partial_1 F_3 & \partial_2 F_3 & \partial_3 F_3 \end{bmatrix}, \quad DF^t - DF = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1, \quad b = \partial_1 F_3 - \partial_3 F_1, \quad c = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2$$

$$n_i = \begin{pmatrix} n_{i1} \\ n_{i2} \\ n_{i3} \end{pmatrix} \qquad n_1^t \left(DF^t - DF \right) n_2 = [n_{11}, n_{12}, n_{13}] \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix}$$

$$= [n_{11}, n_{12}, n_{13}] \begin{bmatrix} a n_{22} + b n_{23} \\ -a n_{21} + c n_{23} \\ -b n_{21} - c n_{22} \end{bmatrix} = a(n_{11} n_{22} - n_{12} n_{21}) + b(n_{11} n_{23} - n_{21} n_{13}) + c(n_{12} n_{23} - n_{22} n_{13})$$

$$n_3 = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \end{vmatrix} = \Big(\underbrace{n_{12}n_{23} - n_{13}n_{22}}_{n_{31}},\ \underbrace{n_{13}n_{21} - n_{11}n_{23}}_{n_{32}},\ \underbrace{n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}}_{n_{33}}\Big)$$

$$\Rightarrow n_1^t \left(DF^t - DF\right) n_2 = a\, n_{33} - b n_{32} + c n_{31}$$

$$= (c, -b, a) \cdot \vec{n}_3$$

تعریف:

$$\operatorname{Curl} F := (c, -b, a)$$

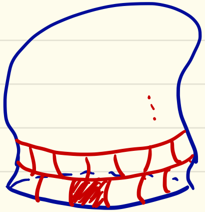
$$= \left(\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2,\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3,\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1\right)$$

$$= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \times (F_1, F_2, F_3)$$

نتیجه:

$$\oint_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R \operatorname{Curl} F \cdot \vec{n}\ dA$$

که $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح است.



قضیه استوکس: اگر Ω یک رویه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه

$$\oint_{\partial\Omega} F\cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} (\operatorname{curl}F\cdot\vec{n})\,ds$$

ایده اثبات: Ω را به نواحی کوچکی تقسیم کنید به طوری که هر قسمت تقریباً یک ناحیه مسطح در $\mathbb{R}^3$ را نشان دهد.

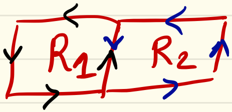
نتیجه قبل را برای این ناحیه مسطح بنویسید.

$$\int_{\partial R_i} F\cdot d\vec{r} = \iint_{R_i} (\operatorname{curl}F\cdot\vec{n})\,ds$$

بردار $\vec{n}$ همان بردار عمود بر سطح Ω است. وقتی این روابط را برای همه قسمت‌های کوچک جمع می‌زنیم

سمت راست $\iint_{\Omega} (\operatorname{curl}F\cdot\vec{n})\,ds$ است و سمت چپ انتگرال روی مرزهای مشترک نواحی R_i حذف

می‌شوند. مثلاً در شکل روبرو در ضلع مشترک R_1 و R_2 دوبار انتگرال در



جهت‌های مختلف ظاهر می‌شود. تنها جملات باقیمانده قسمت‌هایی است که در مرز مشترک ندارند.

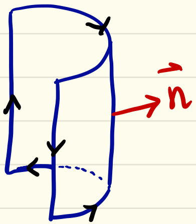
یعنی همان $\partial\Omega$.

توضیح جهت مرز $\partial\Omega$ در قضیه استوکس :

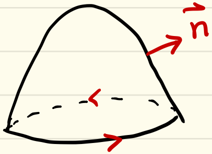
مشابه قضیه گرین وقتی روی رویه روی $\partial\Omega$ راه می‌رویم دست چپ به سمت داخل Ω باشد.

اگر $\vec{T}$ بردار مماس بر $\partial\Omega$ باشد، $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح و $\vec{v}$ بردار عمود بر $\partial\Omega$ که به سمت داخل Ω اشاره دارد باید $(\vec{T}, \vec{v}, \vec{n})$ پایه راستگرد باشد، $\vec{T} = \vec{v} \times \vec{n}$.

دقت کنید این جهت $\partial\Omega$ متناسب بردار $\vec{n}$ تعریف شد یعنی اگر $\vec{n}$ را برعکس کنیم جهت نیز برعکس خواهد شد.



نکته: اگر $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ آنگاه $\operatorname{curl} F = 0$ است و $\oint_C F.dr = 0$ برای هر خم ساده بسته C که در یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد. درنتیجه اگر F روی یک ناحیه همبند ساده دارای خاصیت $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ باشد یک میدان پایستار (گرادیان) است.



مثال: رویه $z=1-x^2-y^2$ در $z\geq 0$.

$$F=(x-y,\ x+y^2,\ z^2)$$

بررسی قضیه استوکس:

$\gamma(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 0)$ پرمایش مرز است.

$$\oint_{\partial\Omega} F\cdot dr=\int_0^{2\pi} F\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos t-\sin t,\ \cos t+\sin^2 t,\ 0)\cdot(-\sin t,\cos t,0)$$

$$=\int_0^{2\pi} 1-\sin t\cos t+\sin^2 t\cos t\ dt=2\pi$$

$$\operatorname{Curl} F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ x-y & x+y^2 & z^2\end{vmatrix}=(0,0,2)$$

پرمایش رویه $\varphi(u,v)=(u,\ v,\ 1-u^2-v^2)$,
$\varphi_u\times\varphi_v=(1,0,-2u)\times(0,1,-2v)$
$=(2u,2v,1)$

$$\vec{n}=\frac{(2u,\ 2v,\ 1)}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}}$$

$$\iint_{\Omega} (\operatorname{Curl} F \cdot \vec{n})\, ds = \iint_{\Omega} \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}}\, ds$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{1/2}} |\varphi_u \times \varphi_v|\, du\, dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} 2\, du\, dv = 2\pi$$

<u>مثال</u>: C را منحنی مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $2x+2y+z=3$ قرار دهید

مقدار $\oint_C F\cdot dr$ را حساب کنید که $F=(-y^3, x^3, -z^3)$

حل را بخشی داخل صفحه $2x+2y+z=3$ بگیرید که C مرز آن است و قضیه استوکس را برای آن بنویسید.

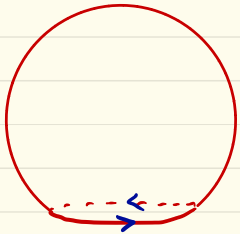
$$\operatorname{Curl} F = (0, 0, 3(x^2+y^2)) \qquad \vec{n} = \frac{(2,2,1)}{3}$$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_{\Omega} (\operatorname{Curl} F \cdot \vec{n})\, ds = \iint_{\Omega} (x^2+y^2)\, ds$$

اگر Ω را به عنوان نمودار تابع $z = 3 - 2x - 2y$ در نظر بگیریم :

$$\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,ds = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\sqrt{1+4+4}\; dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}$$



مثال: Ω را سطح کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ قرار دهید که بالای صفحه $z=0$ قرار دارد.

$$F = \left(y^2\cos(xz),\ x^3e^{yz},\ -e^{-xyz}\right)$$

مقدار شار $\text{Curl}\,F$ که از Ω می‌گذرد، $\displaystyle\iint_{\Omega} (\text{Curl}\,F\cdot\vec{n})\,ds$ را حساب کنید.

بنا بر قضیه استوکس

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dr = \iint_{\Omega} (\text{Curl}\,F\cdot\vec{n})\,ds$$

$\partial\Omega$ را می‌توان به عنوان مرز دیسک $x^2+y^2\leq 4$ در نظر گرفت و قضیه استوکس را برای این ناحیه دوباره نوشت:

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot dr = \iint_{D} (\text{Curl}\,F\cdot\vec{n})\,ds$$

روی این دیسک بردار عمود $\vec{n}$ برابر $\vec{k}$ است.

$$= \iint_{D} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,ds = \iint_{x^2+y^2\leq 4} (3x^2-2y)\,dx\,dy$$

به علت تقارن $\iint_D y \, dx dy = 0$ و در نتیجه :

$$\iint_\Omega (\mathrm{Curl}\, F \cdot \vec{n}) \, ds = \iint_D 3x^2 \, dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^3 \cos^2\theta \, dr d\theta = \pi \times \frac{3}{4} 2^4 = 12\pi$$

ریاضی عمومی ۲

جلسه بیست و هفت ۹۷/۳/۸

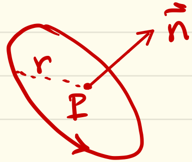
قضیه استوکس: اگر Ω یک رویه هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه

$$\oint_{\partial\Omega} F\cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} (\mathrm{Curl}\,F\cdot\vec{n})\,ds$$

$$\mathrm{Curl}\,F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

اگر Ω را دیسک به شعاع r به مرکز نقطه P بگیریم و $r\to 0$،

$$\iint_{\Omega} \mathrm{Curl}\,F\cdot\vec{n}\,ds \approx (\mathrm{Curl}\,F(P)\cdot\vec{n})\,\pi r^2$$



$$\oint_{\partial\Omega} F\cdot d\vec{r}$$

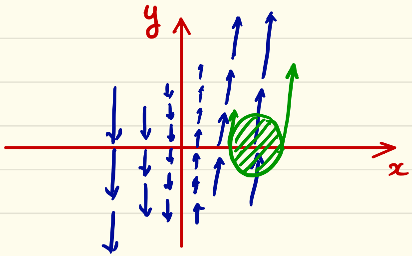
$\mathrm{Curl}\,F(P)\cdot\vec{n}$ مقدار گردش میدان برداری F حول محور $\vec{n}$ را نشان می‌دهد.

مثلاً $F=(-\omega y, \omega x, 0)$ ⟵ سرعت زاویه‌ای این میدان حول محور z برابر ω است.

جهت یافتن جواب میدان
$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(\omega t+\alpha) \\ c\sin(\omega t+\alpha) \end{pmatrix}$$

از طرفی $\text{Curl}\, F = 2\omega$. بنابراین سرعت زاویه‌ای میدان برداری F را برابر $\frac{1}{2}\text{Curl}\, F$ تعریف می‌کنیم.

اگر $\text{Curl}\, F=0$ یعنی آن این است که میدان F چرخش ندارد.



مثال: $F=(0,x,0) \Longrightarrow \text{Curl}\, F=(0,0,1)$

نکته: $$\text{Curl}(\nabla\varphi) = \text{Curl}(\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, \partial_z\varphi) = \big(\underbrace{\cancel{\partial_y(\partial_z\varphi) - \partial_z(\partial_y\varphi)}}_{0},\ \underbrace{\cancel{\partial_z(\partial_x\varphi) - \partial_x(\partial_z\varphi)}}_{0},\ \dots\big) = 0$$

در نتیجه میدانهای گرادیان چرخش ندارند. در واقع روی خطوط انتگرال میدان $\nabla\varphi$ مقدار تابع φ افزایش پیدا می‌کند و خطوط انتگرال به نقطه اول برنمی‌گردند.

قضیه گرین: $\oint_{\partial\Omega} F\cdot dr = \iint_{\Omega} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dA$ Ω یک ناحیه در صفحه است

قضیه استوکس: $\oint_{\partial\Omega} F\cdot dr = \iint_{\Omega} (\text{Curl}\, F \cdot \vec{n})\, ds$ Ω یک رویه دوبعدی در R^3 است.

در واقع قضیه استوکس تعمیم قضیه گرین است. اگر میدان برداری F را به صورت $\tilde{F}=(F_1,F_2,0)$ در R^3 در نظر بگیریم

$$\text{Curl}\,\tilde{F} = (0,0,\partial_x F_2 - \partial_y F_1)$$

(دقت شود $F_1(x,y)$ و $F_2(x,y)$ مستقل از z هستند.) در نتیجه می‌توان برای میدان‌های دوبعدی،

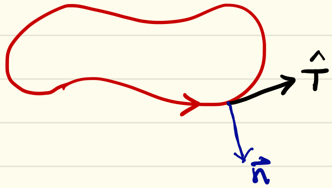
$$\text{Curl}\, F = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$$

تعریف کرد و قضیه گرین را به عنوان حالت خاص قضیه استوکس در نظر گرفت.

$$F=(F_1,F_2)\quad,\qquad G=(-F_2,F_1)$$

$$\operatorname{curl} G=\partial_1 F_1+\partial_2 F_2=\operatorname{div}F=\nabla\cdot F$$

$$\iint_{\Omega}\operatorname{curl}G\,dA=\oint_{\partial\Omega}G\cdot dr=\oint_{\partial\Omega}(G\cdot\hat{T})\,ds$$



G دوران $\frac{\pi}{2}$ میدان F است. درنتیجه $F\cdot\vec{n}=G\cdot\hat{T}$ است که $\hat{T}$ دوران $\frac{\pi}{2}$ بردار $\vec{n}$ است.

درواقع $\vec{n}$ بردار عمود بر مرز و به سمت بیرون ناحیه است.

قضیه دیورژانس در صفحه:

$$\boxed{\iint_{\Omega}\operatorname{div}F\,dA=\oint_{\partial\Omega}(F\cdot\vec{n})\,ds}$$

چون $\oint_{\partial\Omega}(F\cdot\vec{n})ds$ مقدار شار گذرا از مرز $\partial\Omega$ است بنابراین $\iint_{\Omega}\operatorname{div}F$ مقدار شار گذرا از ناحیه Ω را نشان می‌دهد و $\operatorname{div}F(P)$ (در یک نقطه P) متوسط شار گذرا بر واحد سطح در همسایگی نقطه P را بیان می‌کند.

<u>قضیه دیورژانس</u> : D یک ناحیه سه بعدی که مرز آن رویه‌های قطعه‌قطعه هموار و $\vec{n}$ بردار قائم واحد برونگرای ∂D است

$$\iiint_{D} \operatorname{div} F \, dv = \oiint_{\partial D} (F\cdot\vec{n})\, ds$$

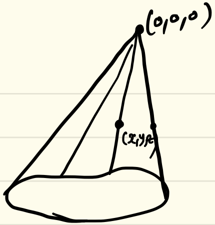
که در آن $\operatorname{div} F = \nabla\cdot F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$.

<u>مثال</u>: استوانه $x^2+y^2\le a^2$ ، $0\le z\le b$ ، $F=(bxy^2, bx^2y, (x^2+y^2)z^2)$

مقدار شار گذرا از این استوانه را به دست آورید. بنابر قضیه دیورژانس کافیست انتگرال زیر را حساب کنیم

$$\iiint_{\substack{0\le x^2+y^2\le a^2\\ 0\le z\le b}} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iiint by^2+bx^2+2z(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^b (b+2z)r^2 \, r\,dz\,d\theta\,dr = 2b^2\times 2\pi\times\frac{1}{4}a^4$$



مثال: فرض کنید S یک مخروط با قاعده ناحیه D و ارتفاع h که رأس آن در مبدأ است.

(در واقع D در صفحه $z=-h$ قرار دارد)

$$F=(x,y,z) \Rightarrow \operatorname{div} F = 3$$

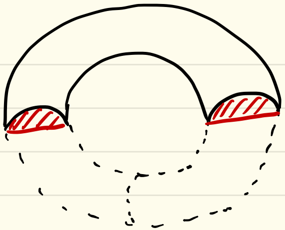
$$\underbrace{\iiint_S \operatorname{div} F\, dV}_{=\,3\times \operatorname{Vol}(S)} = \underbrace{\iint_{\partial S} (F\cdot\vec{n})\, ds}_{=\,\iint_D F\cdot(-\vec{e}_3)\, ds}$$

$$\iint_D F\cdot(-\vec{e}_3)\, ds = \iint_D -z\, ds = h\times(\text{مساحت } D)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Vol}(S) = \tfrac{1}{3} h \times (\text{مساحت } D)$$

روی سطح مخروط در نقطه (x,y,z)، میدان بردار برابر $F=(x,y,z)$ است در نتیجه میدان مماس بر سطح است.

و داریم $F\cdot\vec{n}=0$.



مثال: رویه‌ی دوسیدی S را نیمه‌ی بالای چنبره در نظر بگیرید:

$$T(u,v) = \big((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ a\sin u\big)$$

$$0 \le u \le \pi \ ,\ 0 \le v \le 2\pi$$

مقدار شار گذرا از S برای میدان برداری ثابت $F=(A,B,C)$ را حساب کنید. (بردار عمود بر سطح S که به سمت بیرون چنبره است)

D را قسمتی از صفحه بگیرید که در صفحه $z=0$ قرار می‌گیرد. در واقع D ناحیه بین دو دایره به شعاع‌های a و $a+b$ در صفحه $z=0$ است. چون $\operatorname{div} F=0$ ، اگر قضیه دیورژانس را برای ناحیه محصور بین D و S بنویسیم نتیجه می‌شود که

$$\iint_S (F\cdot\vec{n})\,ds = \iint_D (F\cdot\vec{n})\,ds = \iint_D F\cdot(-e_3)\,ds$$

$$= -C\iint_D ds = -\pi C\left((a+b)^2 - a^2\right)$$

جمع‌بندی: ① $F = \nabla\varphi \Rightarrow \operatorname{Curl} F = 0$

② $\operatorname{Curl} F = 0$ و میدان در داخل ناحیه همبند ساده تعریف شده باشد $\Rightarrow F = \nabla\varphi$ و داریم

$$\varphi(x) = \oint_C F \cdot d\vec{r}$$

که C یک خم دلخواه از نقطه ثابت x_0 به x است.

③ $F = \operatorname{Curl} G \Rightarrow \operatorname{div} F = 0$

④ $\operatorname{div} F = 0$ و میدان در داخل ناحیه Ω تعریف شده است که Ω دارای این خاصیت است که به ازای هر رویه دوبعدی $D \subseteq \Omega$، نقاط درون D در Ω قرار داشته باشند. (درواقع تصویر که را بتوان به یک نقطه جمع کرد.) آنگاه $F = \operatorname{Curl} G$.

$$G(x) = \oint_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

مثال: $F=(x^2+yz,\,-2y(x+z),\,xy+z^2)$ $\Leftarrow$ $\operatorname{div} F=0$ ، میدان G را پیدا کنید $.F=\operatorname{Curl} G$ (تمرین)

$$G(x)=\int_0^1 F(tx)\times x\,dt$$

صورت‌های معادل قضیه دیورژانس: (قضیه ۹ ص ۷۱۴)

$$(1)\qquad \iiint_D \operatorname{Curl} F\, dV = -\oiint_{\partial D} (F\times\hat{N})\, dS$$

$$(2)\qquad \iiint_D \nabla\varphi\, dV = \oiint_{\partial D} \varphi\,\hat{N}\, dS$$

در عبارت‌های بالا از یک بردار انتگرال می‌گیریم. در واقع تساوی برای هر مؤلفه برقرار است.

اثبات - کافیست نشان دهیم به ازای هر بردار ثابت دلخواه c ، ضرب داخلی هر طرف تساوی در c برابر است. یعنی:

$$\iiint_D (\mathrm{Curl}\, F \cdot c)\, dV = -\oiint_{\partial D} (F \times \hat{N}) \cdot c \, ds$$

(اتحادهای صفحه ۷۰۳ کتاب را مطالعه کنید.)

$$\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}(F \times C) = \mathrm{Curl}\, F \cdot C$$

$$\iiint_D \mathrm{div}(F \times C) = \iint_{\partial D} (F \times C) \cdot \hat{N} \, ds$$

از طرفی داریم:

$$(F \times C) \cdot \hat{N} = (\hat{N} \times F) \cdot C = -(F \times \hat{N}) \cdot C$$

برای اثبات ② کافیست نشان دهیم :

$$\iiint_D (\nabla\varphi\cdot C)\,dV = \oint\!\!\oint_{\partial D} \varphi(\hat{N}\cdot C)\,ds$$

اتحاد روبرو را داریم :

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \nabla\varphi\cdot F + \varphi\,\operatorname{div} F$$

برای میدان ثابت $F = C$ داریم :

$$\operatorname{div}(\varphi C) = \nabla\varphi\cdot C$$

$$\iiint_D \operatorname{div}(\varphi C) = \oint\!\!\oint_{\partial D} (\varphi C)\cdot\hat{N}\,ds$$