



میان‌ترم دوم- ۲۶ آذر ۱۳۹۴  
مدت امتحان: ۱۸۰ دقیقه

سؤال ۱. تقریب  $\ln(1+x)$  را برای  $|x|$  کوچک‌تر از ۱ بررسی می‌کنیم.

الف) برای تقریب خطی  $\ln(1.01) \approx 0.01$ ، نشان دهید که قدر مطلق خطای تقریب از  $10^{-4} \times 0.5$  کوچک‌تر است.

ب) برای تقریب

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

وقتی  $0 < x < 0.1$ ، نشان دهید قدر مطلق خطا از  $10^{-(n+1)} \times (n+1)^{-1}$  کوچک‌تر است.

سؤال ۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\int_0^1 e^x \sin x dx$       ب)  $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$

سؤال ۳. تابع  $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$  را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تعریف  $f$  را بیابید.

ب) مشتق  $f$  را محاسبه کرده و تعیین علامت کنید. نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی در دامنه را در صورت وجود پیدا کنید.

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$  را بدست آورید.

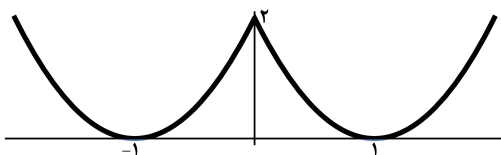
سؤال ۴. نمودار تابع پیوسته  $f$  که در شکل روبرو نمایش داده شده است، ویژگی‌های زیر را دارد:

۱.  $f(-x) = f(x)$  و  $f(x) \geq 0$ .

۲.  $f(x) = 0$  اگر و فقط اگر  $x = \pm 1$ .

۳.  $f(0) = 2$  و  $f$  در صفر مشتق‌پذیر نیست.

۴.  $f$  در همه جا غیر از صفر دوبار مشتق‌پذیر است و  $f'' > 0$ .



۵.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -3$ .

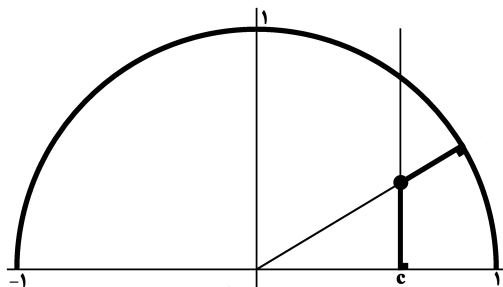
تعریف می‌کنیم  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

الف) نمودار  $F$  را رسم کنید و نقاط اکسترمم، عطف و تحذب تابع را در نقاط مختلف تعیین کنید.

ب) نشان دهید  $1 < F(1) < \frac{2}{3}$ .



سؤال ۵. در نیم‌دایره روبرو به شعاع یک، روی خط قائم  $x = c$  که  $0 \leq c \leq 1$  ثابت داده شده است، نقاطی را پیدا



کنید که مجموع مجذورات فاصله آنها از محیط دایره و قطر افقی  $y = 0$ ، حداقل باشد.

سؤال ۶. نمودار تابع  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

حول محور  $y$  دوران می‌دهیم. در شکل حاصل با سرعت ثابتی آب می‌ریزیم. تابع ارتفاع آب را در نظر بگیرید. آیا مشتقات اول و دوم این تابع در ارتفاع ۱، وجود دارند؟ در صورت وجود، آنها را محاسبه کنید.

(هر سؤال ۲۰ نمره دارد.)

موفق باشید.