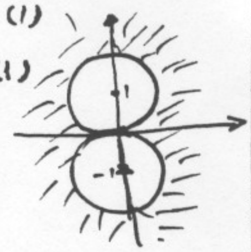
(۱) اگر $z = x+iy$ در نظر بگیریم: $|2iy| \le x^2+y^2$ (۱)

$y>0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2 \ge 1$ (۱)

$y<0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2 \ge 1$ (۱)



نقاط درون دو دایره از صفحه حذف می‌شوند. (۱)

---

(۳) از رابطه $xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]$

نتیجه می‌شود که می‌نیمم عبارت xy وقتی $x+y=n+1$ باشد برابر است با: n (وقتی که یکی از دو عدد برابر n و دیگری برابر ۱ شود). بنابراین:

$$(n!)^2 = 1\times 2\times\cdots\times n\times n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1 =$$

$$=(1\times n)\cdot(2\times(n-1))\cdots((n-1)\cdot 2)\cdot(n\cdot 1) \ge$$

$$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n\ \text{مرتبه}} = n^n \Rightarrow n! \ge n^{\frac{n}{2}} \quad (۲)$$

ب- با توجه به (الف) سری شرایط آزمون سری متناوب (لایب‌نیتز) را دارد: $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \quad (۱)$$

$$(n!)^{n+1} \le (n!)^n\cdot n! \le (n!)^n\cdot(n+1)^n \le$$

$$((n!)\cdot (n+1))^n \le ((n+1)!)^n$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (۱)$$

ج- برای تقریب مقدار سری کافی است $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}1$ یعنی $n>100$. (۲) (لزوماً کمترین n بدست نمی‌آید).

د- چون $n! < n^n$ پس $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

بنابراین با آزمون مقایسه، واگرایی سری قدرمطلق نتیجه می‌شود. (۲)

---

(۴) با استفاده از شکل داریم:

مساحت قطاع $OAB = \frac{1}{2}\theta$

مساحت مثلث $OAB = \frac{1}{2}\sin\theta$

مساحت مثلث $ABC < \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC| < \frac{1}{2}|AB|^2 < \frac{1}{2}\theta^2$

بنابراین با توجه به نامساوی

$|$مساحت مثلث OAB − مساحت قطاع $OAB| <$ مساحت مثلث ABC

داریم: $\left|\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\theta\right| < \frac{1}{2}\theta^2$ (۲,۵)

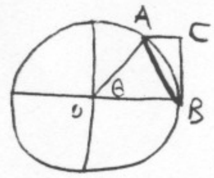
$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta} - 1\right| < \theta$$

پس:

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta} - 1\right| < |0{,}999-1| = 10^{-4}$$

بنابراین کافی است $10^{-n} \le 10^{-4}$ یعنی $n \ge 4$

(۱,۵)



---

(۲) از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n| \quad (۱)$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty}\left[a\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}-\frac{i}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\frac{1}{2}\right]\right|$$

$$= \left|a\left(1-\frac{1}{2}\times 1-\frac{i}{2}\times 0\right)+\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \quad (۲)$$

با توجه به $\frac{a}{2}+\frac{1}{2} < 1$ ، سری همگرا است

(۱)