



۱. صورت قضیه نگاشت باز را نوشته و اثبات کنید.
۲. تعریف همگرایی ضعیف را بنویسید. با یک مثال در فضای  $\ell^p$  برای  $p > 1$  نشان دهید همگرایی ضعیف با همگرایی قوی متفاوت است. اثبات کنید که برای  $p = 1$  نمی‌توان چنین مثالی پیدا کرد.
۳. طیف یک عملگر خطی کراندار را تعریف کنید و نشان دهید یک مجموعه فشرده است.
۴. فضای اکیداً محدب را تعریف کنید. یک مثال از فضایی بزنید که اکیداً محدب نیست (همراه با اثبات). نشان دهید در یک فضای اکیداً محدب بهترین تقریب نسبت به هر زیرفضای دلخواه آن در صورت وجود یکتا است.
۵. فرض کنید  $c_0$  فضای دنباله‌های حقیقی همگرا به صفر باشد با نرم سوپریمم، ثابت کنید نشان دادن  $c_0 \hookrightarrow \ell^p$  برای  $1 \leq p < \infty$  فشرده نیست. یک نرم برای فضای  $c_0$  مثال بزنید که این نشان دادن فشرده شود.
۶. دنباله  $\alpha = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید که دارای این خاصیت است که به ازای هر دنباله  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  در فضای  $\ell^p$  (برای  $1 \leq p \leq \infty$ ) سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  همگرا است. نشان دهید  $\alpha \in \ell^q$  که  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .

موفق باشید.

۹۵/۱۰/۱۵