

۱- نشان دهید متر گسسته روی یک فضای برداری غیر بدیهی از یک نرم به دست نمی‌آید.

۲- اگر $X \neq 0$ فضای برداری نرم‌دار باشد، نشان دهید متر زیر نمی‌تواند از یک نرم به دست بیاید.

$$d(x, y) = \|x - y\| + 1 \text{ برای } x \neq y \text{ و } d(x, x) = 0$$

۳- اگر Y زیرفضای بسته فضای برداری نرم‌دار $(X, \|\cdot\|_X)$ باشد، نشان دهید $\|\cdot\|_0$ یک نرم روی فضای برداری خارج

قسمتی $\frac{X}{Y}$ است.

$$\|x + Y\|_0 = \inf_{z \in x+Y} \|z\|_X$$

اگر X فضای باناخ باشد، در مورد تام بودن $\frac{X}{Y}$ چه می‌توان گفت؟

۴- فرض کنید که X یک فضای ضرب داخلی است. نشان دهید که دو بردار x و y برهم عمودند اگر و تنها اگر

$$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \text{ برای هر } \alpha \in \mathbb{C}$$

۵- یک بار با محاسبه مستقیم و بار دیگر به کمک رابطه متوازی‌الاضلاع رابطه زیر را در یک فضای ضرب داخلی اثبات کنید.

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{1}{2}(x + y)\right\|^2$$

۶- اگر X فضای ضرب داخلی باشد، نشان دهید $A^\perp = (\bar{A})^\perp$ برای هر $A \subseteq X$.

۷- X و Y زیرفضاهای برداری فضای هیلبرت H هستند، ثابت کنید $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$ که

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

۸- اگر $\{e_n\}$ یک دنباله ارتونرمال در فضای ضرب داخلی X باشد. برای بردار ثابت $x \in X$ مقدار مینیمم عبارت

$$\|x - y\| \text{ وقتی } y \in \overline{\text{Span}\{e_n\}} \text{ تغییر می‌کند را به دست آورید.}$$

۹- H فضای هیلبرت و $\{e_n\}$ یک پایه ارتونرمال برای آن است. ثابت کنید $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, y)$ برای هر

$$x, y \in H$$

۱۰- برای هر $n \geq 0$ ، چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که

$$\left\{ e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n \right\} \text{ یک پایه ارتونرمال برای فضای هیلبرت } L^2[-1, 1] \text{ است.}$$