



۱. فرمول وارون تبدیل فوریه را در \mathbb{R}^n اثبات کنید. این فرمول برای چه کلاسی از توابع برقرار است؟

۲. الف- تعریف مشخصه (character) روی یک گروه آبله متناهی را بنویسید.

ب- تعریف عمل گروه دوگان روی مجموعه مشخصه‌ها چیست؟ تعداد اعضای گروه دوگان چند است؟ چرا؟

پ- اعضای گروه دوگان گروه \mathbb{Z}_n را بنویسید.

۳. فرض کنید $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ که $\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ، نشان دهید

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{n^2}{16\pi^2}$$

۴. الف- نشان دهید تبدیل فوریه تابع $g(x) = (1 - |x|)\chi_{(-1,1)}$ برابر است با

$$\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^2$$

ب- به کمک فرمول جمعی پواسون رابطه زیر را برای مقدار غیر صحیح α ، اثبات کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi \alpha)^2}$$

۵. الف- رابطه زیر را برای $s > 1$ اثبات کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

ب- نشان دهید وقتی $s \rightarrow 1^+$ داریم:

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = -\log(s - 1) + O(1)$$

موفق باشید.