آنالیز فوریه

جلسه اول ۹۶/۶/۲۶

پیدایش سری فوریه

$u(x,t)$ دمای نقطه x در زمان t

معادله دما $\leftarrow$

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0<x<l \ ,\ 0<t \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

فرض کنیم $u(x,t)=\varphi(x)\psi(t) \Leftarrow \varphi(x)\psi'(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t)$

$$\underbrace{\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}}_{\text{تابع وابسته به متغیر } t} = c^2 \underbrace{\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}}_{\text{تابع وابسته به متغیر } x} = \lambda$$

$$\begin{cases} \psi' = \lambda \psi \\ \varphi'' = \frac{\lambda}{c^2}\varphi \end{cases} \longrightarrow \psi(t) = e^{\lambda t}\psi(0)$$

شرط مرزی $\Rightarrow \varphi(0) = \varphi(l) = 0$ $\Rightarrow$

ح $\lambda = 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ax + B \Longrightarrow A = B = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0.$

ح $\lambda > 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + Be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} \xrightarrow{\text{شرط مرزی}} A = B = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0.$

ح $-\mu^2 = \lambda < 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = A\cos\frac{\mu}{c}x + B\sin\frac{\mu}{c}x \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$

$$\varphi(x) = B\sin\frac{\mu}{c}x \xrightarrow{\varphi(l)=0} \sin\frac{\mu}{c}l = 0 \Rightarrow \frac{\mu l}{c} = n\pi$$

$$0 \neq n \in \mathbb{Z}$$

همه توابع به صورت $u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$ جواب معادله گرما هستند
$n=1,2,3,\dots$

که در شرط مرزی $u(0,t) = u(l,t) = 0$ صدق می‌کنند.

از آنجا که معادله گرما خطی است، انتظار می‌رود که

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

جواب معادله باشد. (دقت کنید اگر سری بالا جمع متناهی باشد، تابع $u(x,t)$ حتماً جواب است ولی برای سری نامتناهی باید این مطلب بررسی شود)

چالش دیگر این است که بررسی کنیم در چه صورت $u(x,0) = f(x)$ برقرار است.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

سؤال: ① آیا ضرایب c_n وجود دارد که رابطه زیر برقرار باشد؟ یا تابع چه شرایطی باید داشته باشد که به این صورت نوشته شود؟

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

② آیا رابطه $u_t=c^2u_{xx}$ برقرار است؟

$$\partial_t\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\right) \overset{?}{=} c^2\,\partial_{xx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\right)$$

$$\Big\Vert ? \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\Vert ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{xx} u_n$$

$$h_n = \sum_{m=1}^{n} u_m(x,t) \longrightarrow h$$

سؤال: چه موقع $\partial_t h$ وجود دارد و $\partial_t h = \lim_{n\to\infty} \partial_t h_n$ ؟

$$\left.\begin{aligned} f_n &\longrightarrow f \\ f_n' &\xrightarrow{\text{unif}} g \end{aligned}\right\} \Rightarrow f' = g$$

سری فوریه :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

سوالات اساسی: ① برای چه توابعی ضرایب a_n و b_n وجود دارد که بتوان f را به صورت سری فوریه نمایش داد؟

② معنی نمایش بالا چیست؟ همگرایی نقطه ای سری، همگرایی یکنواخت، همگرایی در نرم

$$\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}$$

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}$$

فرم مختلط سری فوریه :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

برای لحظه‌ای فرض کنیم سری فوریه در بازه $[-l,l]$ همگرای یکنواخت به f باشد.

$$\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$=\underbrace{\cancel{\int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx}}_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\cancel{\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx}}_{0}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$= b_m l$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad m=1,2,\ldots \\ a_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad m=0,1,2,\ldots \end{aligned}}$$

آنالیز فوریه جلسه دو

۹۶/۶/۲۷

سری فوریه :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{m\pi x}{l}\, dx \qquad m=1,2,\dots$$

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{m\pi x}{l}\, dx \qquad m=0,1,2,\dots$$

$$f:[-l,l]\longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\,dx := \hat{f}(n)$$

سؤال‌های اساسی: ① یگانگی سری فوریه: اگر برای توابع f و g که برای هر $n\in\mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$$

در چه شرایطی می‌توان نتیجه گرفت که $f=g$ ؟

۲) علامت ~ یا انتساب سری فوریه به تابع f به چه معنی است؟ در واقع آن را قرار دهیم

$$S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

- آیا $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$ موجود است؟ یا در چه شرایطی وجود دارد؟

- همگرایی نقطه‌ای: $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$ به ازای هر x ؟

- همگرایی یکنواخت: $\|f-S_N\|_\infty = \sup\limits_{|x|\le \ell} |f(x)-S_N(x)| \longrightarrow 0$ ؟

- همگرایی در نرم: $\|f-S_N\|_2 := \left[\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)-S_N(x)|^2 \, dx\right]^{1/2} \longrightarrow 0$ ؟

تذکر: برای اینکه ضرایب سری فوریه تعریف شود حداقل لازم است که f انتگرال‌پذیر باشد.
منظور از انتگرال‌پذیری، انتگرال‌پذیری ریمان است. می‌دانیم که هر تابع انتگرال‌پذیر حداکثر در یک مجموعه اندازه صفر ناپیوسته است.

مثال - $f(x)=x$ در بازه $[-\pi,\pi]$. $\qquad C_0=0$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{xe^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\cancel{\frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx}$$

0

$$=\frac{-1}{2\pi in}\times 2\pi(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}}{in}$$

$$f(x) \sim \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}$$

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

به ازای $x=0$ تساوی داریم ولی به ازای $x=\pi$ سمت راست صفر است

درحالیکه $f(\pi)=\pi$.

آزمون وایراشتراس : اگر برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ داشته باشیم $|f_n(x)| \leq M_n$ به ازای $x \in I$

و $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت است .

کاربرد در سری فوریه : اگر برای سری فوریه $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$ داشته باشیم

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$ آنگاه سری فوریه همگرای یکنواخت است و در نتیجه حد آن

یک تابع پیوسته است .

← از شرایط برابر سری فوریه نتیجه می‌شود که حد سری باید در دو سر بازه

یک مقدار داشته باشد .

سؤال: آیا ضرایب سری فوریه می‌تواند دلخواه باشد؟ یعنی آیا به ازای هر دنباله $\{C_n\}$ تابع f وجود دارد که

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\, dx \quad ?$$

جواب: حداقل باید $\{C_n\}$ کران‌دار باشد. زیرا

$$|C_n| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \left|f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\right| dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|\, dx$$

f انتگرال‌پذیر باشد $\Longrightarrow$ $\hat{f}(n)$ کران‌دار

اگر f مشتق پذیر باشد، ضرایب فوریه f' با ضرایب فوریه f چه ارتباطی دارند؟

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f'(x)\, e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(-\frac{in\pi}{l}\right) e^{-\frac{in\pi x}{l}}\, dx$$

$$= \frac{f(l)-f(-l)}{2l}\, e^{in\pi} + \frac{in\pi}{l}\,\hat{f}(n)$$

نتیجه: اگر تابع f مشتق پذیر باشد $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ یعنی ثابت $C>0$ وجود دارد که $\left|\hat{f}(n)\right| \le \frac{C}{n}$.

نکته: اگر تابع تناوبی f، m بار مشتق پذیر باشد و به ازای $K \le m$ باشند، آنگاه

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

یک به یکی سری فوریه:

فرض کنید $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ به ازای هر n، می‌خواهیم نشان دهیم تحت شرایط پیوستگی f و g داریم $f = g$. شکل این است که ضرایب فوریه تابع $h = f - g$ همه برابر صفرند و h یک تابع پیوسته است و می‌خواهیم نشان دهیم $h = 0$.

قضیه: فرض کنید h یک تابع انتگرال‌پذیر باشد که $\hat{h}(n)=0$ به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$. آنگاه $h(x_0)=0$ اگر h در نقطه x_0 پیوسته باشد.

اثبات: $l=\pi$.

$$\hat{h}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,e^{-inx}\,dx$$

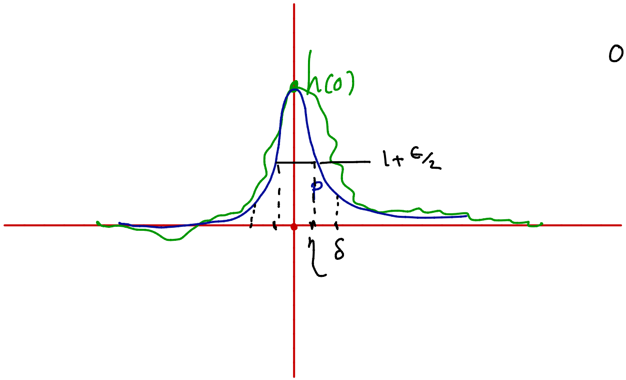
در ضمن فرض کنیم h تابع حقیقی باشد. پس داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin nx\,dx=0$$

هر چندجمله‌ای مثلثاتی $P_k(x)$ داشته باشیم داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)P_k(x)\,dx=0$$

فرض کنیم $x_0=0$ نقطه پیوستگی h باشد و $0<h(0)\neq 0$



قرار دهید

$$p(x)=\epsilon+\cos\theta$$

$$p_k(x)=[p(x)]^k$$

که k بعداً انتخاب می‌شوند.

بنابر پیوستگی h، مقدار $\delta>0$ وجود دارد که $\frac{h(0)}{2}<|h(x)|$ برای $|x|<\delta$

و ϵ را به گونه‌ای انتخاب کنید که برای $\pi\geq|x|\geq\delta$ داشته باشیم $|p(x)|\leq 1-\frac{\epsilon}{2}$

در ضمن $\eta<\delta$ وجود دارد که $1+\frac{\epsilon}{2}\leq p(x)\leq 1+\epsilon$ برای $|x|\leq\eta$.

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, P_k(x)\, dx = \underbrace{\int_{|x|\leq \eta} \cdots}_{I_1} + \underbrace{\int_{\eta \leq |x| \leq \delta} \cdots}_{I_2} + \underbrace{\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \cdots}_{I_3}$$

از طرفی فرض کنید $|f(x)| \leq A$

$$|I_3| \leq \int_{\delta \leq |x|} A \cdot (1-\epsilon/2)^k dx \leq 2\pi A\, (1-\epsilon/2)^k$$

در بازه $\eta \leq |x| \leq \delta$ تابع h و p مثبت هستند

$$I_2 \geq 0$$

$$I_1 = \int_{|x|<\eta} h(x)\,[P(x)]^k dx \geq \int_{|x|<\eta} \frac{h(0)}{2}\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^k = \underline{h(0)\eta}\,(1+\epsilon/2)^k$$

می‌توان K را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کرد که $0 < I_1 + I_2 + I_3$.

آنالیز فوریه

جلسه ۹۶/۷/۱

تعریف: پیچش (Convolution)

فرض کنید f و g دو تابع متناوب با دوره تناوب 2π (و انتگرال‌پذیر) باشند،

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

خاصیت: ① $f*g = g*f$

$$(g*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) f(x-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} -g(x-y)\, f(y)\, dy \longleftarrow \quad y \mapsto x-y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\, f(y)\, dy$$

تناوبی بودن f و g

$$= (f * g)(x)$$

$$f * (g+h) = f*g + f*h \qquad ۲$$

$$(cf)*g = c(f*g) \qquad ۳$$

$$(f*g)*h = f*(g*h) \qquad ۴$$

$$\widehat{(f*g)}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n) \qquad ۵$$

$$\widehat{(f*g)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, e^{-inx}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(y) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\, e^{-in(x-y)}\, dx}_{\hat{g}(n)}\, e^{-iny}\, dy$$

$$= \hat{f}(n)\, \hat{g}(n)$$

(۶) $f*g$ تابع پیوسته است.

$$(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[g(x_1-y)-g(x_2-y)\right]dy$$

اگر g پیوسته باشد، پیوسته یکنواخت نیز هست و

$$\forall \epsilon\ \exists \delta : |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |g(x_1-y)-g(x_2-y)|<\epsilon$$ برای هر y

$$\Rightarrow |(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| \le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy$$

$$= O(\epsilon)$$

حتی اگر f و g هیچکدام پیوسته نباشند (به معنی ریمان انتگرالپذیرند)

$$\left|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(y)\left[g(x_1-y)-g(x_2-y)\right]\right|dy$$

$$\leq \frac{C}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g(x_1-y)-g(x_2-y)\right|dy$$

لم: اگر h یک انتگرالپذیر در بازه $[a,b]$، آنگاه دنباله توابع پیوسته h_k وجود دارند

که
$$\int_a^b |h_k-h|\,dx \longrightarrow 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x_1-y)-g(x_2-y)|\,dy \le \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|g(x_1-y)-g_k(x_1-y)|\,dy}_{I_1}$$

$$+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|g_k(x_1-y)-g_k(x_2-y)|\,dy}_{I_2}$$

$$+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|g_k(x_2-y)-g(x_2-y)|\,dy}_{I_3}$$

برای ϵ دلخواه k به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $I_1 , I_3 < \epsilon$. برای مقدار ثابت K

δ وجود دارد که $I_2 < \epsilon$ وقتی $|x_1-x_2|<\delta$.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \underbrace{\left[\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \right]}_{D_N(x-y)} dy$$

$$= f * D_N$$

هسته‌های خوب :

دنباله توابع $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ را هسته‌ی خوب گوییم هرگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1 \qquad (1)$$

ثابت M مستقل از n وجود دارد

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\,dx \leq M \qquad (2)$$

برای هر $\delta > 0$ دلخواه

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty \text{ وقتی }} 0 \qquad (3)$$

قضیه: فرض کنید $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ که هسته‌های خوب باشند و f یک تابع انتگرال‌پذیر. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

به شرط آنکه f در نقطه x پیوسته باشد. اگر f یک تابع پیوسته (به عنوان یک تابع روی دایره) باشد آنگاه همگرایی بالا یکنواخت است.

اثبات.
$$(f * K_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,[f(x-y) - f(x)]\,dy$$

اگر f در x پیوسته باشد

$$\forall \epsilon\ \exists \delta : |y| < \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| < \epsilon$$

$$\left|(f * K_n)(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y|<\delta} |K_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)|\, dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |y| > \delta} |K_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)|\, dy$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\, dy + \frac{2C}{2\pi} \int_{\pi \geq |y| > \delta} |K_n(y)|\, dy$$

وقتی $n \to \infty$ بنابر خاصیت 3 جمله دوم به صفر میل می‌کند و جمله اول بنابر خاصیت 2

کوچکتر است از $\frac{M\epsilon}{2\pi}$. پس

$$\limsup_{n\to\infty} |(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon M}{2\pi}$$

و چون ϵ دلخواه است پس حد عبارت بالا صفر است.

سؤال: آیا $\{D_N\}$ هسته‌های خوب هستند؟

① $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}\,dx = 1$$

② $$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx = ?$$

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right| dx \geq 2\int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(N+1/2)x}{x/2} \right| dx$$

$$= 4(N+1/2) \int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin(N+1/2)x}{(N+1/2)x} \right| dx$$

$$= 4 \int_{0}^{(N+1/2)\pi} \left| \frac{\sin y}{y} \right| dy \geq 4 \int_{\pi}^{N\pi} \left| \frac{\sin y}{y} \right| dy$$

$$= 4\sum_{k=1}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy \geq 4\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty$$

③ $$\int_{\delta<|x|<\pi}\left|\frac{\sin (N+1/2)x}{\sin x/2}\right|dx = ?$$

آنالیز فوریه

جلسه چهار - ۹۶/۷/۳

میانگینهای چزارو و جمع‌پذیری .

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

n-امین میانگین چزارو

$$b_n = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}{n}$$

اگر دنباله $\{a_n\}$ به α همگرا باشد، دنباله $\{b_n\}$ نیز به α همگرا است .

اگر $\{b_n\}$ به β همگرا باشد، گوییم دنباله $\{a_n\}$ به معنای چزارو به β همگرا است.

مثال - $a_n = (-1)^n \Longrightarrow$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

برای سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ، مفهوم همگرایی کلاسیک از همگرایی دنباله مجموع‌های جزئی $S_N=\sum_{n=0}^{N} c_n$ به دست می‌آید. اگر دنباله $\{S_N\}$ به مفهوم چزارو همگرا باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ را جمع‌پذیر چزارو گوییم.

$$\sigma_N = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}}{N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N-n}{N} c_n$$

مثال. سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ جمع‌پذیر چزارو است هرچند همگرا نیست.

جمع‌پذیری چزارو سری فوریه

$$S_N(x) = (f * D_N)(x)$$

سؤال: اگر f در نقطه x پیوسته باشد، دنباله $\{S_N(x)\}$ به معنای چزارو همگرا است؟

$$\frac{S_0(x)+S_1(x)+S_2(x)+\cdots+S_{N-1}(x)}{N} = \frac{(f*D_0)(x)+\cdots+(f*D_{N-1})(x)}{N}$$

$$= f * \underbrace{\left(\frac{D_0+D_1+\cdots+D_{N-1}}{N}\right)}_{F_N}(x)$$

هسته فیجر $\leftarrow F_N$

سؤال: آیا $\{F_N\}$ هسته خوب است؟

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin x/2} = \frac{1}{N}\frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 x/2}$$

خواص هسته‌ای خوب :

$$① \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1$$

$$② \quad \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = 2\pi$$

③ $$\int_{\delta\le|x|\le\pi} |F_N(x)|\,dx = \frac{1}{N}\int_{\delta\le|x|\le\pi} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 x/2}\,dx$$

$$\le \frac{1}{N\sin^2 \delta/2}\int_{\delta\le|x|\le\pi} \sin^2\frac{Nx}{2}\,dx$$

$$\le \frac{2\pi}{N\sin^2 \delta/2} \longrightarrow 0$$

برازای هر δ که ثابت وقتی $N\to\infty$.

قضیه: اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر باشد و در یک نقطه پیوستگی f. آنگاه سری فوریه در نقطه x، جمع‌پذیر چزارو است به $f(x)$. اگر f یک تابع متناوب پیوسته باشد آنگاه جمع‌پذیری چزارو به طور یکنواخت برقرار است.

نتیجه: اگر f یک انتگرال‌پذیر باشد که $\hat{f}(n)=0$ برای هر n. آنگاه $f=0$ در همه نقاط پیوستگی f.

اثبات ـ وقتی $\hat{f}(n)=0 \Longrightarrow S_N(x)\equiv 0 \longrightarrow$ بنابر قضیه قبل اگر x نقطه پیوستگی f باشد، $\{S_N(x)\}$ به معنای چزارو به $f(x)$ میل می‌کند $\Longrightarrow f(x)=0$

نتیجه: اگر f یک تابع پیوسته متناوب باشد، می‌توان آن را به طور یکنواخت با چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تقریب زد. یعنی به ازای هر ϵ، چندجمله‌ای مثلثاتی $p(x)=\sum_{n=-N}^{N}\alpha_n e^{inx}$ وجود دارد که

$$\|f-p\|_\infty<\epsilon$$

جمع‌پذیری آبل

سری $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ را جمع‌پذیر آبل گوییم هرگاه برای هر $0\le r<1$، سری زیر همگرا باشد.

$$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n$$

و $\lim_{r\to 1}A(r)$ موجود باشد.

مثال ـ $c_n=1 \Leftarrow$ $A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ جمع پذیر آبل نیست.

مثال ـ $c_n=1/n \Leftarrow$ $A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n} = -\ln(1-r)$ ، جمع پذیر آبل نیست.

مثال ـ $c_n=(-1)^n \Leftarrow$ $A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} (-r)^n = \frac{1}{1+r}$ جمع پذیر آبل به $1/2$ است.

جمع پذیر چزارو به صفر است.

مثال ـ $c_n=(-1)^n(n+1) \Leftarrow$ $A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-r)^n$ جمع پذیر آبل است و چزارو نیست.

$1, -2, 3, -4$

$1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$

$1, 0, 2/3, 0, 3/5, 0, 4/7, 0, \cdots$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

آبل

$$A_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, dy \; r^{|n|} e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int f(y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} \, dy$$

$$= (f * P_r)(x)$$

$$\boxed{P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}}$$

هسته پواسون

$P_r(x)$ هسته‌های خوب هستند:

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{0}\,dx = 1$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 2\pi$$

تمرین: می‌توان نشان داد که

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}.$$

③ $$\int_{\delta\le|x|\le\pi} |P_r(x)|\,dx = \int_{\delta\le|x|\le\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$$

$$\le \int_{\delta\le|x|\le\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\,dx$$

برای هر δ ثابت وقتی $r\to 1$

$$\longrightarrow 0$$

قضیه: اگر f انتگرال‌پذیر باشد، سری فوریه آن در نقاط پیوستگی جمع‌پذیر آبل به $f(x)$ است و اگر f پیوسته و تناوبی باشد، بطور یکنواخت جمع‌پذیر آبل است.

کاربرد:

معادله لاپلاس در داخل دایره

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

در مختصات قطبی

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{for } r<1 \\ u\Big|_{r=1} = f(\theta) \end{cases}$$

اگر معادله بالا جوابی به صورت

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(r)\, e^{in\theta}$$

داشته باشد

$$0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(a_n'' + \frac{1}{r} a_n'\right) e^{in\theta} + \frac{1}{r^2} a_n (in)^2 e^{in\theta}$$

کافی است :
$$r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0$$

$$a_n = r^{\alpha} \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$$

$$a_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}\right) e^{in\theta}$$

انتظار داریم سری فوق برای r نزدیک صفر کراندار باشد بنابراین برای $n>0$ باید ضریب $\beta_n = 0$ و برای $n<0$ باید $\alpha_n = 0$.

$$u(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, r^{|n|}\, e^{in\theta}$$

به ازای هر c_n در معادله $\Delta u=0$ صدق می‌کند (با فرض مجاز بودن جابجایی

مشتق و سری)

برای محاسبه c_n باید

$$(*)\quad f(\theta)=\lim_{r\to 1} u(r,\theta)$$

اگر c_n ضریب فوریه f باشه یعنی $\hat{f}(n)=c_n$ آنگاه بنابر همگرایی آبل

سری فوریه رابطه $(*)$ برقرار است به شرط آنکه f پیوسته باشد.

آنالیز فوریه

جلسه پنجم ۹۶/۷/۱۰

همگرایی در نرم :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy$$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

همگرایی در نرم : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left| S_N(f)(x) - f(x) \right|^2 dx \longrightarrow 0$

تعریف (فضای برداری) : مجموعه V که اعضای آن را بردار گوییم به همراه یک میدان (در اینجا $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$)

همراه با روابط جمع $u+v$ به ازای هر $u,v \in V$ و ضرب اسکالر $r.u$ به ازای هر $r \in \mathbb{C}$, $u \in V$.

که خواص زیر برقرار باشند.

(۱) $(V,+)$ یک گروه آبلی است.

(۲)

⋮

مثال: $\mathbb{C}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است.

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\}$$

$$(z_1, \dots, z_n) + (u_1, \dots, u_n) = (z_1 + u_1, \dots, z_n + u_n)$$

$$r \cdot (z_1, \dots, z_n) = (rz_1, \dots, rz_n)$$

مثال: $\ell^2 = \{(z_1, z_2, \dots) = (z_i)_{i=1}^{\infty} : z_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty\}$ یک فضای برداری است با جمع زیر:

$$(z_i)_{i=1}^{\infty} + (u_i)_{i=1}^{\infty} = (z_i + u_i)_{i=1}^{\infty}$$

نکته: در تعریف فوق می‌توان دنباله‌ی $(\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$ را در نظر گرفت که $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |z_i|^2 < \infty$.

مثال - R مجموعه همه توابع انتگرال‌پذیر ریمان روی بازه $[-\pi,\pi]$. با جمع معمولی دو تابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$$

$$(r.f)(x) := r\,f(x)$$

تعریف (نرم) اگر V یک فضای برداری باشد تابع $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty)$ نرم گوییم که

(۱) $\|u\|=0 \iff u=0$

(۲) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

(۳) $\|ru\| = |r|.\|u\|$

نکته: $d(u,v)=\|u-v\|$ یک متر روی V القاء می‌کند.

تعریف (ضرب داخلی) : اگر V فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد، تابع $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

را ضرب داخلی روی V گوییم هرگاه :

(۱) نسبت به مؤلفه اول خطی است $\langle u+v , w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$ و $\langle ru,v \rangle = r\langle u,v \rangle$

(۲) $\langle v,u \rangle = \overline{\langle u,v \rangle}$

(مزدوج یک عدد مختلط)

(۳) $\langle u,u \rangle \geq 0$ و $\langle u,u \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $u=0$.

نکته: اگر V فضای برداری ضرب داخلی باشد آنگاه تابع $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$

یک نرم روی فضای برداری خواهد بود.

مثال: $\mathbb{C}^n$ ، $z=(z_1,\dots,z_n)$, $w=(w_1,\dots,w_n)$

$$\langle z,w\rangle = z_1\overline{w_1}+\cdots+z_n\overline{w_n}$$

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}$$ و نرم القائی

مثال- $\ell^2=\left\{(z_i)_{i=-\infty}^{+\infty} : \sum_{i=-\infty}^{+\infty}|z_i|^2<\infty\right\}$

$$z=(z_i)_{i=-\infty}^{+\infty} \quad , \quad w=(w_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} \langle z,w\rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} z_i\overline{w_i} \\ |z_i\overline{w_i}| \le \dfrac{|z_i|^2+|w_i|^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |\langle z,w\rangle| \le \underbrace{\frac{1}{2}\left[\sum|z_i|^2+\sum|w_i|^2\right]}_{<\infty}$$

در نتیجه تابع $\langle\cdot,\cdot\rangle:\ell^2\times\ell^2\to\mathbb{C}$ تعریف می‌شود.

نرم القائی از این ضرب داخلی روی l^2 عبارتست از

$$\|z\| = \sqrt{\langle z,z\rangle} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |z_i|^2\right]^{1/2}$$

مثال: فضای برداری توابع انتگرال‌پذیر (به معنای ریمان)

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

و نرم القائی (نرم L^2)

$$\|f\|_{L^2} := \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

نکته: فضای توابع انتگرال‌پذیر با نرم القائی فوق یک فضای تام (Complete) نیست. یعنی دنباله کوشی وجود دارد که حد آن در این فضا نیست.

نکته: ضرب داخلی به نوعی مفهوم زاویه‌ی دو بردار را نشان می‌دهد در واقع

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta$$

که θ زاویه‌ی بین u و v است. این مطلب از نامساوی زیر که به نامساوی کوشی-شوارتز موسوم است

نتیجه می‌شود:

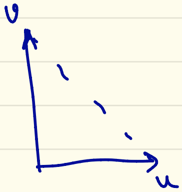
$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$$

$$0 \le p(t) = \|u+tv\|^2 = \langle u+tv \,,\, u+tv\rangle = \overbrace{\langle u,u\rangle}^{\|u\|^2} + |t|^2 \overbrace{\langle v,v\rangle}^{\|v\|^2} + 2t\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle$$

← به عنوان یک چندجمله‌ای درجه ۲ وقتی $t \in \mathbb{R}$ است همیشه مثبت است و Δ این چندجمله‌ای باید منفی باشد.

$$\Rightarrow \quad |\mathrm{Re}\langle u,v\rangle|^2 \le \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

تعریف: دو بردار را برهم عمود (متعامد) گوییم هرگاه $(u,v) = 0$



قضیه فیثاغورس: $(u,v)=0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$$(u+v, u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \underbrace{(v,u) + (u,v)}_{2\mathrm{Re}(u,v)}$$

تعریف: یک مجموعه $\{e_n\}_{n\in I}$ را در فضای ضرب داخلی V یک مجموعه متعامد گوییم هرگاه

$$(e_n, e_m) = 0 \quad \text{for} \quad n \neq m$$

مثال- توابع $e_n(x)=e^{inx}$ برای $n\in\mathbb{Z}$ یک مجموعه متعامد تشکیل می‌دهند.

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx$$

$$= \left.\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right|_{x=-\pi}^{\pi} = 0$$ اگر $m\neq n$.

$$\|e_n\| = \sqrt{2\pi}$$

نکته: سری فوریه $f(x)\sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ در نظر بگیرید

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\langle f, e_n\rangle$$

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\langle f, e_n\rangle e_n$$

هدف: وقتی $N\to\infty$ داریم $\|S_N(f)-f\|_{L^2}\longrightarrow 0$

یا به طور معادل $\Big\|\underbrace{\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\langle f,e_n\rangle e_n - f}_{g}\Big\|_{L^2}\longrightarrow 0$

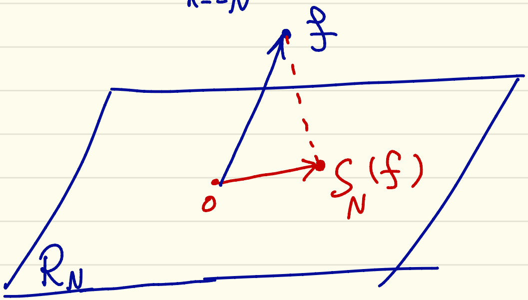
$$\langle g, e_m\rangle = \Big\langle \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\langle f,e_n\rangle e_n - f\ ,\ e_m\Big\rangle$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\langle f,e_n\rangle\langle e_n,e_m\rangle - \langle f,e_m\rangle$$

اگر $|m|\le N \Rightarrow$ $\quad = \frac{1}{2\pi}\langle f,e_m\rangle\cdot\langle e_m,e_m\rangle - \langle f,e_m\rangle$

$$= 0$$

درحقیقت $S_N(f)$ تصویر بردار f بر زیرفضای تولیدشده توسط بردارهای $\{e_n\}_{n=-N}^{N}$.



زیرفضای تولیدشده توسط بردارهای $\{e_n\}_{n=-N}^{N}$ را R_N می‌نامیم

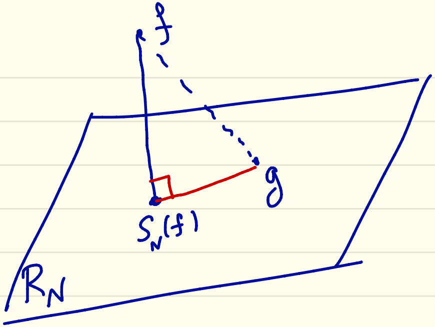
$$R_N = \left\{ \sum_{|n|\le N} a_n e_n \ : \ a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

که زیرفضای $2N+1$ بعدی است.

<u>گزاره:</u> $S_N : R \longrightarrow R_N$ یک عملگر تصویر است یعنی $S_N(f)-f$ بر زیرفضای R_N عمود است.

<u>نتیجه:</u> $S_N(f)$ بهترین تقریب از تابع f در زیرفضای R_N است یعنی برای هر $g \in R_N$ داریم

$$\|f-g\| \ge \|f-S_N(f)\|$$



$$g-S_N(f) \perp f-S_N(f)$$

$$\Longrightarrow \quad \|f-g\|^2=\|f-S_N(f)\|^2+\|g-S_N(f)\|^2$$

$$\geq \|f-S_N(f)\|^2$$

نکته: $\quad S_{N-1}(f)\in R_N \Longrightarrow \|f-S_{N-1}(f)\|\geq\|f-S_N(f)\|$

اثبات ادعا وقتی f پیوسته است: باید نشان دهیم به ازای هر $\epsilon>0$ برای مقادیر N به اندازه کافی بزرگ داریم $\|f-S_N(f)\|_{L^2}<\epsilon$. بنابر قضایای جلسه قبل چندجمله‌ای مثلثاتی

$$P_K(x)=\sum_{n=-K}^{K}\alpha_n e^{inx}$$

وجود دارد که $\|f-P_K\|_\infty<\epsilon$. از طرفی $P_K\in R_N$ به ازای $N\geq K$.

بنابراین $\|f-S_N(f)\|_{L^2} \leq \|f-P_K\|_{L^2}$ به‌ازای هر $N \geq K$.

$$= \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-P_K(x)|^2\, dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \|f-P_K\|_\infty \left[\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx\right]^{1/2}$$

$$< \sqrt{2\pi}\ \epsilon$$

اثبات وقتی f انتگرال‌پذیر است

لم: اگر تابع f انتگرال‌پذیر (ریمان) روی $[-\pi,\pi]$ باشد آنگاه دنباله توابع پیوسته g_k وجود دارد که

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g_k(x)|\, dx \longrightarrow 0$$ و $\|g_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

اثبات لم: نقاط ناپیوستگی f اندازه صفر، مجموعه بازه‌های باز $\{I_n\}$ وجود دارند که $\sum |I_n| < \epsilon$ و $\bigcup I_n$ شامل

همه نقاط ناپیوستگی f است. g روی $[-\pi,\pi]\setminus \bigcup I_n$ برابر f قرار دهید و روی هر $I_n=(a_n,b_n)$

برابر $g(x) = \frac{(x-a_n)}{b_n-a_n}\big(f(b_n)-f(a_n)\big) + f(a_n)$. $\quad \|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g-f|\, dx = \int_{\bigcup I_n} |g-f|\, dx \le 2\|f\|_\infty \cdot \sum |I_n| < 2\epsilon \|f\|_\infty$$

ادامه اثبات همگرایی سری فوریه: تابع پیوسته g را در نظر بگیرید که $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty$ و

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g-f|\, dx < \epsilon$$

اکنون چندجمله‌ای مثلثاتی $P_K \in R_K$ وجود دارد که $\|g-P_K\|_\infty < \epsilon$

برای $N \ge K$. $\quad \|S_N(f)-f\|_{L^2} \le \|P_K-f\|_{L^2}$

$$\|P_k - f\|_{L^2} \le \left[\int_{-\pi}^{\pi} |P_k - g|^2\, dx\right]^{1/2} + \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g-f|^2\, dx\right]^{1/2}$$

$$\le \left[\int_{-\pi}^{\pi} \|P_k - g\|_\infty^2\, dx\right]^{1/2} + \left(\|g-f\|_\infty\right)^{1/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} |g-f|\, dx\right]^{1/2}$$

$$\le \sqrt{2\pi}\cdot \underbrace{\|P_k - g\|_\infty}_{<\epsilon} + \left(2\|f\|_\infty\right)^{1/2} \epsilon^{1/2}$$

$$\le C\, \epsilon^{1/2}$$

آنالیز فوریه

جلسه ششم ۹۶/۷/۱۵

قضیه: اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر روی $[-\pi,\pi]$ باشد و $f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ سری فوریه آن، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - S_N(f)(x)\right|^2 dx \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad N \to \infty. \qquad (1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \qquad (2)$$

(تساوی پارسوال)

اثبات (۲)

$$\|S_N(f)\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x) \right\|_{L^2}^2 =$$

$$= \left\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x), \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x) \right\rangle = \sum_{n,m=-N}^{N} c_n \overline{c_m} \langle e_n, e_m \rangle$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \cdot \|e_n\|^2$$

$$\|f - S_N(f)\|_{L^2} \longrightarrow 0 \implies \|S_N(f)\|_{L^2} \longrightarrow \|f\|_{L^2}$$

$$\implies 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \longrightarrow \|f\|_{L^2}^2$$

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^2}^2$$

<u>نکته</u>: تساوی پارسوال نتیجه شود $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ و اینکه $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ نمی‌تواند ضرایب فوریه یک تابع انتگرال‌پذیر باشد.

<u>نکته</u>: اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر باشند و $f \sim \sum a_n e^{inx}$ و $g \sim \sum b_n e^{inx}$ آنگاه

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} a_n \overline{b_n}$$

ایده اثبات :

$$S_N(f) \longrightarrow f \quad , \quad S_N(g) \longrightarrow g$$

$$\langle S_N(f), S_N(g) \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle$$

نکته :

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\mathcal{F} : R \xrightarrow[\text{عملگر خطی}]{\text{تبدیل فوریه}} \ell^2$$

R: فضای برداری توابع انتگرال پذیر (به معنای ریمان) در بازه $[-\pi, \pi]$

ℓ^2: فضای برداری دنباله $(c_n)_{-\infty}^{\infty}$ که $\sum |c_n|^2 < \infty$

$$\mathcal{F}(f) = (c_n)_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2} = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, dx\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}$$

تبدیل فوریه پوشا نیست. اگر به جای R فضای توابع L^2 را در نظر بگیریم که به معنای لبگ انتگرال‌پذیرند و $\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx<\infty$ آنگاه تبدیل فوریه یک عملگر پوشا است. (در واقع L^2 را می‌توان به این ترتیب ساخت که روی فضای توابع پیوسته $C[-\pi,\pi]$ نرم $\|f\|_{L^2}=\left[\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\right]^{1/2}$ قرار دهید و با تکمیل از آن، آن را در یک فضای متریک تام بنشانید. فضای جدید را L^2 می‌نامیم)

مثال- $\mathcal{F}:R\to \ell^2$ پوشا نیست. تابع انتگرال‌پذیر f وجود ندارد که $f\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}$.

$$A_r(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^ne^{inx}}{n}=(f*P_r)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)P_r(x-y)\,dy$$

$$|A_r(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\;P_r(x-y)\,dy\leq\|f\|_\infty\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x-y)dy$$

$$=\|f\|_\infty$$

درنتیجه باید $A_r(x)$ به ازای هر $0 \le r < 1$ به طور یکنواخت کران دار باشد در حالیکه برای این سری داریم

$$A_r(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = -\ln(1-r)$$

قضیه (همگرایی نقطه وار با شرط مشتق پذیری) فرض کنید f تابع انتگرال پذیر باشد که در نقطه x_0 مشتق پذیر است.

آنگاه $S_N(f)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ وقتی $N \to \infty$.

اثبات:

$$S_N(f)(x_0) - f(x_0) = (f * D_N)(x_0) - f(x_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - y) - f(x_0)]\, D_N(y)\, dy$$

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0-y) - f(x_0)}{y} & y \neq 0 \\ -f'(x_0) & y = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

این تابع انتگرال پذیر است (چرا؟)

$$D_N(y) = \frac{\sin (N+1/2)x}{\sin x/2}$$

$$S_N(f)(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, y\, D_N(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,\frac{y}{\sin y/2}\;\underbrace{\sin (N+\tfrac{1}{2})y}_{\sin Ny \cos y/2 \,+\, \cos Ny \sin y/2}\; dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(F(y)\,\frac{y \cos y/2}{\sin y/2}\right) \sin Ny \, dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(F(y)\, y\right) \cos Ny \, dy$$

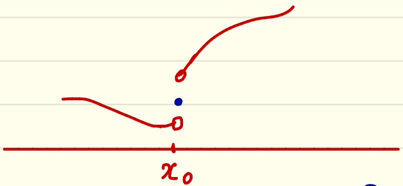
درواقع این دو انتگرال ضرایب فوریه (سری فوریه حقیقی) توابع انتگرال‌پذیر $F(y)y$ و $F(y)\dfrac{y\cos y/2}{\sin y/2}$

هستند. بنابر تساوی پارسوال این ضرایب به صفر میل می‌کنند وقتی $N\to\infty$.

تذکر: به‌جای شرط مشتق‌پذیری می‌توانیم تنها فرض کنیم که

$$\frac{f(x_0-y)-f(x_0)}{y}$$

کران‌دار است. (اثبات دقیقاً مشابه قبل است)



اگر f در x_0 ناپیوسته باشد ولی حدهای

$$f(x_0+)=\lim_{y\to x_0^+} f(y)$$

$$f(x_0-)=\lim_{y\to x_0^-} f(y)$$

وجود داشته باشند

علاوه براین برای $y>0$ تابع $\dfrac{f(x_0+y)-f(x_0+)}{y}$ کران دار باشد و همچنین

$\dfrac{f(x_0-y)-f(x_0-)}{y}$ برای $y>0$ کران دار باشد.

آنگاه $(S_N f)(x_0) \to \dfrac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ اثبات دقیقاً شبیه قبل است با این تفاوت که

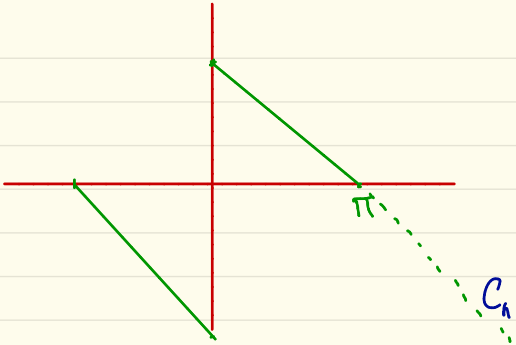
$$F(y) = \frac{f(x_0-y)+f(x_0+y)-f(x_0+)-f(x_0-)}{2y} \qquad y \neq 0$$

$$S_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-y) D_N(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+y) D_N(y)\,dy$$

$$S_N f(x_0) - \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, y\, D_N(y)\,dy$$

آنالیز فوریه

جلسه هفت - ۹۶/۷/۱۷



مثال: $f(x) = \pi - x$ در $0<x<\pi$ و بطور فرد توسعه دهید.

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}(\pi-x)e^{-inx}\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{0}(-x-\pi)\, e^{-inx}\,dx}_{\int_0^{\pi}(x-\pi)\, e^{inx}\,dx}\right]$$

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\,e^{-inx}\,dx = (\pi-x)\,\frac{e^{-inx}}{-in}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\,\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{in} + \frac{e^{-inx}}{(-in)^2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{in} + \frac{(-1)^n}{-n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$2\pi\, C_n = \left[\frac{\pi}{in} + \frac{(-1)^n}{-n^2} + \frac{1}{n^2}\right] - \left[\frac{\pi}{-in} + \frac{(-1)^n}{-n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2\pi}{in}$$

$$c_n = \frac{1}{in} \qquad n \neq 0$$

تابع f فرد است $\Rightarrow$ $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{in} \longrightarrow \pi - x$$

برای $0 < x \leq \pi$

برای اینکه همگرایی سری را در نقطه $x=\pi$ بررسی کنیم باید تابع را به صورت متناوب گسترش دهیم و شرایط همگرایی سری را در نقطه $x=\pi$ بررسی کنیم.

نتیجه بارسوال:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)^2\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

همگرایی یکنواخت :

فرض کنید تابع f مشتق پذیر باشد آنگاه در هر نقطه همگرایی نقطه ای $(S_N f)(x_0) \longrightarrow f(x_0)$

برقرار است. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = f(x)$

اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$ همگرا باشد ، آنگاه بنابر آزمون وایرشتراس همگرایی بالا یکنواخت است.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx = \frac{d_n}{-in}$$

که $d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\,dx$ ضرایب فوریه تابع f' هستند.

(البته باید $f(\pi) = f(-\pi)$)

$$\sum |c_n| = \sum \left|\frac{d_n}{n}\right|$$
$$\le \left(\sum |d_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx\right]^{1/2}$$

جمع‌بندی: تابع f مشتق‌پذیر باشد و متناوب و f' انتگرال‌پذیر و کران‌دار باشد آنگاه سری فوریه f همگرای یکنواخت است.

یک تابع ممکن است پیوسته باشد ولی سری فوریه آن همگرا نشود.

مثال:

$$f_N(x) = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{e^{inx}}{n} \longrightarrow i(\pi - x)$$

$$P_N(x) = e^{2iNx} f_N(x) = \frac{e^{iNx}}{-N} + \frac{e^{i(N+1)x}}{-N+1} + \cdots + \frac{e^{3iNx}}{N}$$

M امین جمله مجموع جزئی سری فوریه P_N $\longleftarrow$

$$S_M(P_N) = \begin{cases} P_N & M \geq 3N \\ \tilde{P}_N & M = 2N \\ 0 & M < N \end{cases}$$

$$\tilde{P}_N(x) = \frac{e^{iNx}}{-N} + \cdots + \frac{e^{i(2N-1)x}}{-1}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}(x)$$

$$\boxed{N_{k+1} > 3N_k}$$

$$S_{2N_m}(g) = \alpha_1 P_{N_1}(x) + \cdots + \alpha_{m-1} P_{N_{m-1}}(x) + \alpha_m \tilde{P}_{N_m}(x)$$

$$S_{2N_m}(g)(0) = -\alpha_m \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N_m}\right)$$

اگر $\boxed{\alpha_m \log N_m \to \infty}$ نتیجه می‌شود که سری فوریه‌ی g در نقطه $x=0$ واگرا است.

برای اینکه g پیوسته باشد کافی است سری $\sum \alpha_k P_{N_k}(x)$ همگرای یکنواخت باشد. برای

این منظور باید سری عددی $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|P_{N_k}\|_\infty$ همگرا باشد.

$$\|P_N\|_\infty = \|e^{2iNx} f_N(x)\|_\infty$$ ولی

$$= \|f_N\|_\infty$$

اگر بدانیم دنباله $\{\|f_N\|_\infty\}_{N=1}^{\infty}$ کران‌دار است آنگاه به شرط $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty}$ تابع g پیوسته خواهد بود.

به عنوان مثال دنباله $N_k = 3^{2^k}$ و $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$ در شرایط خواسته شده صدق می‌کند.

$$\alpha_k \log N_k = \frac{2^k}{k^2} \longrightarrow \infty$$

گزاره: ثابت $C>0$ وجود دارد که به ازای هر $|x|\le \pi$ و هر $1\le N$ داریم

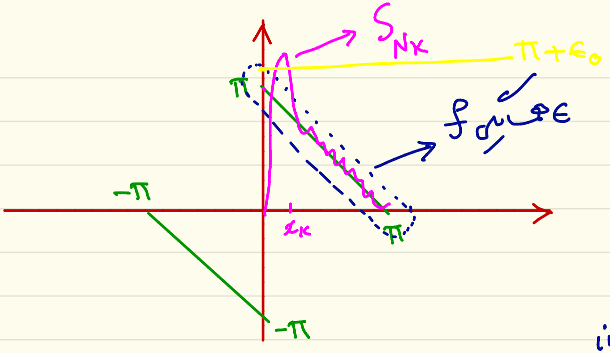
$$\left|f_N(x)\right| \le C$$

لم: فرض کنید $A_r=\sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n$ کراندار باشد وقتی $r\to 1$. اگر $c_n=O(\frac{1}{n})$ آنگاه مجموع‌های جزیی $S_N=\sum_{n=1}^{N} c_n$ کراندار هستند.

$$\left|A_r(f)(x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, P_r(y)\, dy\right| \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\, dy$$

$$= \|f\|_\infty$$

پدیده گیبس (Gibbs)



$f(x) = \pi - x \qquad 0 < x < \pi$

$f(-x) = -f(x)$

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{in} \longrightarrow f(x) \qquad x \neq 0 \text{ برای}$$

$$S_N(x) = \sum_{1\leq |n| \leq N} \frac{e^{inx}}{in}$$

یعنی همگرایی یکنواخت :

$$\|S_N - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

$\forall \epsilon$ ، برای N به اندازه کافی بزرگ ، $\forall x$: $|S_N(x) - f(x)| < \epsilon$

نقیض گزاره بالا : $\exists \epsilon_0,\ \exists N_k \to \infty,\ \exists x_k$: $|S_{N_k}(x_k) - f(x_k)| > \epsilon_0$

به علاوه می‌توان نشان داد که مقدار $\epsilon_0 > 0$ وجود دارد به طوری که رابطه زیر برقرار است:

$$\|S_N\|_\infty - \pi > \epsilon_0$$

این اتفاق را پدیده گیبس گویند.

آنالیز فوریه

جلسه هشتم ۹۶/۷/۲۲

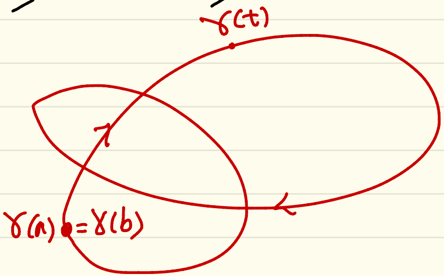
کاربردهای سری فوریه :

نامساوی isoperimetric :

سؤال : چه شکلی در صفحه بیشترین مساحت را دارد با محیط ثابت.

تعریف : راه هموار در صفحه گوییم هرگاه تابع γ دارای مشتق پیوسته باشد به طوریکه $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

$$\gamma'(t)\neq 0 \qquad \forall t\in[a,b]$$



و آن راه را بسته گوییم هرگاه $\gamma(a)=\gamma(b)$.

و آن راه را ساده گوییم هرگاه خودش را قطع نکند یعنی در نقطه $t_1,t_2\in(a,b)$ وجود نداشته باشند که $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$

تابع $s:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ را بازپرمایش خم γ گوییم هرگاه تابع s یک تابع پوشا و C^1 باشد. آنگاه

$$\eta(t)=\gamma(s(t))$$

اگر $s'>0$، آن را بازپرمایش جهت‌نگه‌دار و اگر $s'<0$ آن را جهت برگردان گوییم.

<u>تعریف طول</u>: یک پرمایش $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ برای خم درنظر بگیرید آنگاه رابطه انتگرالی

$$l=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt$$

طول خم را محاسبه می‌کند.

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))$$

$$\gamma'(t)=(x'(t),y'(t))\quad,\quad|\gamma'(t)|=\sqrt{(x')^2+(y')^2}$$

این تعریف برحسب بازپرمایش $[a,b]\longrightarrow[c,d]:s$ خوش‌تعریف است یعنی

$$l=\int_c^d|\eta'(t)|\,dt=\int_a^b|\gamma'(s)|\,ds$$

تعریف (پرمایش برحسب طول) $\gamma:[0,l]\to\mathbb{R}^2$ را پرمایش برحسب طول خم γ گوییم هرگاه $|\gamma'(s)|=1$

یک پرمایش اولیه $\eta:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ برای خم بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} T:[0,l] & \longrightarrow & [a,b] \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$|\gamma'(s)|=1 \qquad\qquad \eta(T(s))=\gamma(s)$$

$$\gamma'(s)=\eta'(T(s))\cdot T'(s)$$

$$\left|(T^{-1})'(T(s))\right|=|T'(s)|^{-1}=|\eta'(T(s))|$$

$T:=S^{-1}:[0,l]\to[a,b]$ و $S(t)=\int_a^t|\eta'(\theta)|\,d\theta:[a,b]\to[0,l]$ قرار دهید

تعریف (مساحت) با توجه به فرمول گرین مساحت داخل یک خم بسته و ساده با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_{\Gamma} x\,dy - y\,dx\right|$$

فرمول گرین :

$$\int_{\Gamma} P\,dy - Q\,dx = \int_{A} (P_x + Q_y)\,dx\,dy$$

سوال : بزرگترین مساحت با خم به طول l

$$\sup_{\gamma=(x,y)\in\mathbb{K}} \int_{\gamma} x\,dy - y\,dx$$

$$\mathbb{K} = \left\{ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : \int_a^b \left[(x'(s))^2 + (y'(s))^2\right]^{1/2} ds = l \right\}$$

قضیه (نامساوی isoperimetric) فرض کنید γ یک خم بسته ساده در $\mathbb{R}^2$ با طول l و مساحت A باشد آنگاه

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

و تساوی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که γ یک دایره باشد.

اثبات: گام اول: تنها کافیست برای $l=2\pi$ اثبات کنیم. (با تجانس حالت‌های دیگر به دست می‌آیند.)

<u>گام دوم:</u> γ را خم به طول 2π با پارامتر بر حسب طول $\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$.

$$\gamma(s)=(x(s),y(s)) \Longrightarrow |\gamma'(s)|^2=(x'(s))^2+(y'(s))^2=1$$

<u>گام سوم:</u> باید نشان دهیم

$$\frac{1}{2}\left|\int_\gamma x\,dy-y\,dx\right| \leq \pi$$

یا به طور معادل

$$\left|\int_0^{2\pi} x(s)y'(s)-y(s)x'(s)\,ds\right| \leq 2\pi$$

$$x(s) \sim \sum a_n e^{ins} \quad , \quad y(s) \sim \sum b_n e^{ins}$$

$$x'(s) \sim \sum i n a_n e^{ins} , \quad y'(s) \sim \sum i n b_n e^{ins}$$

$$\int_0^{2\pi} x(s) y'(s) \, ds = \int_0^{2\pi} \sum_{n,m} a_n (i m b_m) e^{i(n+m)s} \, ds$$

این تساوی از همگرایی L^2 سری فوریه نتیجه می‌شود.
(محاسبه ضرب داخلی)

$$= \sum_{n+m=0} 2\pi i m \, a_n b_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -2\pi i n \, a_n b_{-n}$$

از آنجا که $x(s)$ و $y(s)$ توابع حقیقی هستند نتیجه می‌شود

$$\bar{b}_n = b_{-n} \quad , \quad \bar{a}_n = a_{-n}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} x(s) y'(s) - x'(s) y(s) \, ds \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -2\pi i n \left(a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n \right) \right|$$

رابطه پارسوال برای توابع x' و y' :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x'(s))^2\,ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|a_n|^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y'(s))^2\,ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|b_n|^2$$

از رابطه $(x'(s))^2+(y'(s))^2=1$ نتیجه می‌شود

$$(*)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=1$$

از طرفی

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -2\pi i n\left(a_n\bar{b}_n-\bar{a}_n b_n\right)\right| \leq 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$$

$$\leq 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right) = 2\pi$$

شرط تساوی: برای $|n| \geq 2$ باید $a_n = b_n = 0$.

برای $|n| \leq 1$ باید $\left|a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n\right| = |a_n|^2 + |b_n|^2$

یا به طور معادل $|a_n| = |b_n|$.

در نتیجه داریم:

$$x(s) = \overset{\overline{a_1}}{\overset{\shortparallel}{a_{-1}}} e^{-is} + a_0 + a_1 e^{is}$$

$$y(s) = \underset{\overline{b_1}}{\underset{\shortparallel}{b_{-1}}} e^{-is} + b_0 + b_1 e^{is}$$

از طرفی از $(*)$ نتیجه می‌شود $|a_1|^2 + |b_1|^2 = \frac{1}{2}$ و با توجه به رابطه $|a_1| = |b_1|$

داریم: $a_1 = \frac{1}{2} e^{i\alpha}$, $b_1 = \frac{1}{2} e^{i\beta}$ و

$$\left|a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n\right| = \frac{1}{2}\left|\sin(\alpha - \beta)\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow |\sin(\alpha-\beta)| = 1 \Longrightarrow \alpha - \beta = \pi/2$$

$$x(s) - a_0 = \frac{1}{2}\left[e^{i(s+\alpha)} + e^{-i(s+\alpha)}\right]$$

$$= \cos(s+\alpha)$$

$$y(s) - b_0 = \frac{1}{2}\left[e^{i(s+\beta)} + e^{-i(s+\beta)}\right]$$

$$= \cos(s+\beta) = \cos(s+\alpha+\pi/2) = -\sin(s+\alpha)$$

$$|x(s) - a_0|^2 + |y(s) - b_0|^2 = 1 \quad \Longleftarrow$$

آنالیز فوریه

جلسه ۹ - ۹۶/۷/۲۴

کاربرد سری فوریه :

γ را یک عدد ثابت بگیرید و دنباله $\langle n\gamma\rangle$ جزء اعشاری عدد $n\gamma$ را در نظر بگیرید.

سؤال: توزیع یکنواخت این دنباله در بازه $[0,1)$ است.

تعریف:

$[x]$ = جزء صحیح عدد x که بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

$\langle x\rangle = x-[x]$ جزء اعشار عدد x می‌نامیم.

اگر γ یک عدد گویا باشد، دنباله $\langle n\gamma\rangle$ برای $n=1,2,\dots$ حداکثر تعداد متناهی عضو متفاوت دارد.

$$a_n = \langle n\gamma\rangle \quad , \quad \gamma = p/q$$

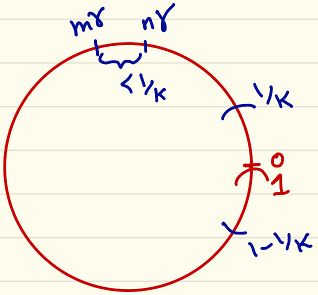
$$a_q = \langle p\rangle = 0 \quad , \quad a_{q+1} = \left\langle (q+1)\frac{p}{q}\right\rangle = \left\langle 1 + p/q\right\rangle = \langle p/q\rangle = a_1$$

$$a_{n+q} = a_n \quad \forall n \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \underbrace{\{p/q, 2p/q, \dots, (q-1)p/q, 0\}}_{\text{حداکثر } q \text{ عضو دارد.}}$$

برعکس اگر دنباله $\langle n\gamma \rangle$ تنها تعداد متناهی تعداد بپذیرد، آنگاه γ یک عدد گویا است.

$$a_m = a_n \Rightarrow \langle m\gamma \rangle = \langle n\gamma \rangle \Rightarrow (m-n)\gamma = p \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{p}{m-n} \in \mathbb{Q}$$



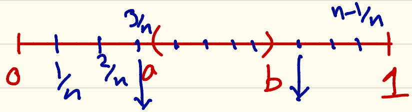
نتیجه: اگر γ گنگ باشد، هیچ دو عضو دنباله $\langle n\gamma \rangle$ برابر نیستند.

گزاره: دنباله $\langle n\gamma \rangle$ وقتی γ عدد گنگ است در $[0,1)$ چگال است.

تعریف: دنباله $\{c_n\}$ را هم‌توزیع (یا توزیع یکنواخت) در $[0,1)$ گوییم هرگاه برای هر بازه $(a,b) \subset [0,1)$ داشته باشیم

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : c_n \in (a,b)\}}{N} = b-a$$

مثال - دنباله $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ هم توزیع است.



$$m(b-a)-2 \leq \#\{0 \leq k \leq m : \tfrac{k}{m} \in (a,b)\} \leq (b-a)m$$

$$N = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \Rightarrow (b-a)N - 2n \leq \#\{1 \leq k \leq N : c_n \in (a,b)\} \leq (b-a)N$$

$$(b-a) - \frac{2n}{N} \leq \frac{\#}{N} \leq b-a$$

$$\frac{\#}{N} \to b-a$$

$$\{\underbrace{0, \tfrac{1}{2}}, \underbrace{0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}}, \dots, \underbrace{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n-1}{n}}\}$$

$$N_1=\frac{n(n-1)}{2}-1\leq M\leq\frac{n(n+1)}{2}-1=N_2$$

$$(b-a)N_1-2(n-1)\leq\#(N_1)\leq\#(M)\leq\#(N_2)\leq(b-a)N_2$$

$$\underbrace{(b-a)\frac{N_1}{M}-\frac{2(n-1)}{M}}\leq\frac{\#(M)}{M}\leq(b-a)\frac{N_2}{M}\leq(b-a)\frac{N_2}{N_1}$$

$$(b-a)\frac{N_1}{N_2}-\frac{2(n-1)}{N_1}\leq$$

قضیه: اگر γ یک عدد گنگ باشد، دنباله $\langle n\gamma\rangle$ هم‌توزیع است.

$$\#\left\{1\leq n\leq N:\ \langle n\gamma\rangle\in(a,b)\right\}=\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(n\gamma)$$

$$\chi_I(x)=\begin{cases}1 & x\in I\\ 0 & x\notin I\end{cases}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(n\gamma) \longrightarrow b-a=\int_0^1 \chi_{(a,b)}(x)\,dx$$

گزاره: اگر f تابع انتگرال‌پذیر باشد و تناوبی با دوره تناوب 1، آنگاه

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

گام اول

اثبات برای توابع $e_m(x)=e^{2\pi i m x}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_m(n\gamma)=\frac{1}{N}\left[e^{2\pi i m\gamma}+\left(e^{2\pi i m\gamma}\right)^2+\left(e^{2\pi i m\gamma}\right)^3+\dots+\left(e^{2\pi i m\gamma}\right)^N\right]$$

$$=\underbrace{\frac{e^{2\pi i m\gamma}}{N}\times\frac{1-e^{2\pi i m N\gamma}}{1-e^{2\pi i m\gamma}}}_{\text{نرم این عدد از مرتبه } \frac{1}{N} \text{ است.}} \longrightarrow 0=\int_0^1 e_m(x)\,dx$$

(چون γ گنگ است عبارت $\left|1-e^{2\pi i m\gamma}\right|\neq 0$)

گام دوم: گزاره برای چندجمله‌ای‌های مثلثاتی درست است. زیرا اگر گزاره برای دو تابع f_1 و f_2 درست باشد برای $\alpha f_1+\beta f_2$ نیز درست است که $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

گام سوم: (اثبات برای توابع پیوسته) برای هر $\epsilon>0$ چندجمله‌ای مثلثاتی P وجود دارد که

$$\|f-P\|_\infty<\epsilon .$$

$$\exists N:\quad \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(n\gamma)-\int_0^1 P(x)\,dx\right|<\epsilon$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\gamma)-\int_0^1 f(x)\,dx\right|\le\left|\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(n\gamma)-\int_0^1 P(x)\,dx\right]\right|$$

$$+\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(f(n\gamma)-P(n\gamma)\big)\right|+\left|\int_0^1\big(f(x)-P(x)\big)dx\right|$$

$$\le 3\epsilon$$

گام چهارم (اثبات برای توابع انتگرال‌پذیر در حالت خاص)

اگر برای تابع انتگرال‌پذیر f دنباله توابع پیوسته g_k و h_k داشته باشیم به طوری که

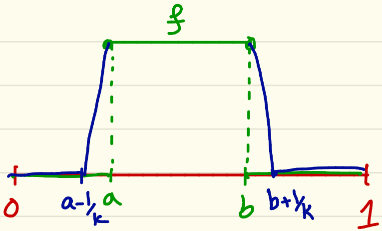
$$g_k \le f \le h_k \quad , \quad \int_0^1 g_k(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 h_k(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

در اینصورت گزاره برای تابع f نیز برقرار است.

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_k(n\gamma) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_k(n\gamma)$$

وقتی $N \to \infty$، سمت راست و چپ نامساوی بالا به $\int_0^1 f(x)dx$ همگرا هستند.



گام پنجم (اثبات برای $f=\chi_{(a,b)}$)

$$h_k(x)=\begin{cases} 0 & x\in(b+1/k,1)\cup(0,a-1/k) \\ 1 & x\in(a,b) \end{cases}$$

در بقیه نقاط به طور خطی تعریف می‌کنیم به طوری که h_k پیوسته باشد. واضح است که $h_k \geq f$

$$\int_0^1 h_k(x)\,dx \longrightarrow b-a=\int_0^1 f(x)\,dx$$

به طور مشابه

$$g_k(x)=\begin{cases} 0 & x\in(b,1)\cup(0,a) \\ 1 & x\in(a+1/k,\ b-1/k) \end{cases}$$

واضح که $g_k \leq f$

گام ششم: (اثبات برای یک تابع انتگرال‌پذیر دلخواه)

اگر f تابع انتگرال‌پذیر باشد، برای هر ϵ، افراز $0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$ وجود دارد که

$$M_i=\sup_{x_i<x<x_{i+1}} f(x) \quad , \quad m_i=\inf_{x_i<x<x_{i+1}} f(x)$$

$$f_U(x)=\sum_{i=0}^{N-1} M_i\,\chi_{(x_i,x_{i+1})}(x) \quad , \quad f_L(x)=\sum_{i=0}^{N-1} m_i\,\chi_{(x_i,x_{i+1})}(x)$$

$$f_L \le f \le f_U$$

و $\int_0^1 f_U(x)-f_L(x)\,dx<\epsilon \longleftarrow$ (تفاضل مجموع ریمان بالایی و پایینی است)

گزاره برای توابع f_L و f_U درست است. (زیرا ترکیبهای خطی متناهی تابع پله‌ای هستند که در گام پنجم نشان داریم گزاره برای آنها برقرار است.)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_L(n\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_U(n\gamma)$$

$$\int_0^1 f_L(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_L(n\gamma)\right] \leq \liminf\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma)\right] \leq \limsup\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma)\right]$$

$$\leq \lim\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_U(n\gamma)\right]$$

$$= \int_0^1 f_U(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup[\cdots] - \liminf[\cdots] \leq \int_0^1 f_U(x) - f_L(x)\,dx < \epsilon$$

حد وجود دارد و مقدار آن بین $\int_0^1 f_U(x)dx$ و $\int_0^1 f_L(x)dx$ است.

آنالیز فوریه

جلسه ده ۹۶/۷/۲۹

کاربرد سری فوریه :

تابع پیوسته هیچ جا مشتق‌پذیر $\longleftarrow$ توابع وایراشتراس $W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x)$

$0<b<1, \qquad ab>1+\frac{3\pi}{2}, \quad a\in\mathbb{Z}$

قضیه: اگر $0<\alpha<1$ تابع

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha}\, e^{i2^n x}$$

پیوسته است ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

چون $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha}$ کران دار است، پس بنابر آزمون وایراشتراس تابع f_α پیوسته است.

$$S_N(f) = f * D_N \qquad \sigma_N(f) = f * F_N$$

$$\Delta_N(f) := 2\sigma_{2N}(f) - \sigma_N(f) = f * [2F_{2N} - F_N]$$

$$f \sim \sum c_n e^{inx} \Rightarrow S_N = \sum_{|n|\le N} c_n e^{inx}$$

$$\sigma_N = \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{inx}$$

$$\Delta_N = \sum_{|n|\le 2N} 2\left(1 - \frac{|n|}{2N}\right) c_n e^{inx} - \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{inx}$$

$$= \sum_{|n|\le N} c_n e^{inx} + \sum_{N+1\le |n| \le 2N} \left(2 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{inx}$$

سری فوریه f_α :

$$f_\alpha = \sum c_n e^{inx}$$

$$c_n = 2^{-k\alpha} \quad \text{for } n = 2^k$$

$$c_n = 0 \quad \text{برای بقیه حالات}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{2^k} = S_{2^k}$$

$$\frac{N}{2} < 2^k = N' \leq N \qquad S_N = \Delta_{N'}.$$

لم ۱: $\Delta_{2^k} - \Delta_{2^{k-1}} = 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}.$

لم ۲: اگر تابع g در نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشد آنگاه $\sigma_N'(g)(x_0) = O(\log N)$ و درنتیجه

$$\Delta_N'(g)(x_0) = O(\log N)$$

اگر f_α در x_0 مشتق‌پذیر باشه

<u>اثبات قضیه</u> :

$$\Delta'_{2^k}(x_0) - \Delta'_{2^{k-1}}(x_0) = O(k) \Longleftarrow \text{لم ۲}$$

$$\Delta'_{2^k}(x_0) - \Delta'_{2^{k-1}}(x_0) = 2^{k(1-\alpha)} e^{i2^k x_0} \Longleftarrow \text{لم ۱}$$

چون $0<\alpha<1$ است به تناقض داریم.

<u>اثبات لم</u> :

$$\sigma_N(g)(x) = g * F_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)\, g(y)\, dy$$

(1) $$\sigma_N(g)'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(x_0-y)\, g(y)\, dy$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2 x/2}$$

برای اینکه رابطه (1) درست باشد باید $\int |F_N'(x)|\,dx$ کران دار باشد. (همچنین این کران به N وابسته باشد)

$$F_N'(x) = \frac{\sin\frac{Nx}{2}\cos\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}\cos x/2}{\sin^3\frac{x}{2}}$$

$$F_N'(0) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\,dy = 0$$ از زوجی F_N' تابعی است و داریم:

$$(\sigma_N(g))'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\,g(x_0-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\left[g(x_0-y)-g(x_0)\right]dy$$

$$|\sigma_N(g)'(x_0)| \leq C\int_{-\pi}^{\pi} |y|\,|F_N'(y)|\,dy$$

که C از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\left|\frac{g(x_0-y)-g(x_0)}{y}\right| \le C$$

(g در x_0 مشتق‌پذیر است.)

تنها کافیست نشان دهیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} |y F_N'(y)|\,dy = O(\log N)$$

از طرفی داریم:

$$|F_N'(y)| \le \frac{A}{|y|^2} \quad (2)$$

، $|F_N'(y)| \le A N^2$ که A مستقل از N است.

فرض کنید (2) برقرار باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |y F_N'(y)|\,dy = \int_{|y|\ge \frac{1}{N}} \cdots + \int_{|y|\le \frac{1}{N}} \cdots \le \underbrace{\int_{|y|\ge\frac{1}{N}} A\frac{dy}{|y|}}_{O(\log N)} + \underbrace{\int_{|y|\le \frac{1}{N}} AN^2 \times \frac{1}{N}\,dy}_{O(1)}$$

$$F_N'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin Nx}{\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}\cos x/2}{\sin^3\frac{x}{2}}$$

$$|x^2F_N'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin x/2}\right)^2 |\sin Nx| + \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\frac{Nx}{2}}{\sin x/2}\right|\left|\frac{x}{\sin x/2}\right|^2 \left|\cos\frac{x}{2}\right| \times \left|\sin\frac{Nx}{2}\right|$$

$$= O(1)$$

$$|F_N'(x)| = \left|\sum_{|n|\leq N}\left[\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{inx}\right]'\right| \leq \sum_{|n|\leq N} |n|\left(1-\frac{|n|}{N}\right) = O(N^2)$$

آنالیز فوریه

جلسه یازده ۹۶/۸/۱

تمرین فصل ۲

۴) $f(\theta)=\theta(\pi-\theta)$ در $[0,\pi]$ به صورت فرد با دوره تناوب 2π توسعه دهید. سری فوریه آن را حساب کنید.

$$\text{فرد} \Longrightarrow f(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

$$f(\theta) = \sum c_n e^{in\theta} = -f(-\theta) = \sum -c_n e^{-in\theta} \Rightarrow c_{-n} = -c_n$$

$$f(\theta) = \overline{f(\theta)} \Longrightarrow \overline{c_n} = c_{-n}$$

$$\int_0^{\pi} \theta \sin n\theta \, d\theta = -\theta \frac{\cos n\theta}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{n} d\theta = -\theta\frac{\cos n\theta}{n} + \frac{\sin n\theta}{n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \theta^2 \sin n\theta \, d\theta = -\theta^2 \frac{\cos n\theta}{n}\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int 2\theta \frac{\cos n\theta}{n} d\theta}_{2\theta\frac{\sin n\theta}{n^2} - \int 2\frac{\sin n\theta}{n^2} d\theta} = -\theta^2\frac{\cos n\theta}{n} + \frac{2\theta \sin n\theta}{n^2} + \frac{2\cos n\theta}{n^3}\Big|_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\pi\,\frac{\cos(n\pi)}{n}\times\pi + \pi^2\,\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{2}{n^3}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\times\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow f(\theta) \sim \sum_{n\ \text{فرد}} \frac{8}{\pi n^3}\sin n\theta$$

همگرای یکنواخت

$$f\left(+\tfrac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin\left((2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,8}{\pi(2k+1)^3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum b_n \sin(n\theta)\right|^2 d\theta = \sum_{m,n}\int_{-\pi}^{\pi} b_m b_n \sin m\theta \,\sin n\theta\,d\theta$$

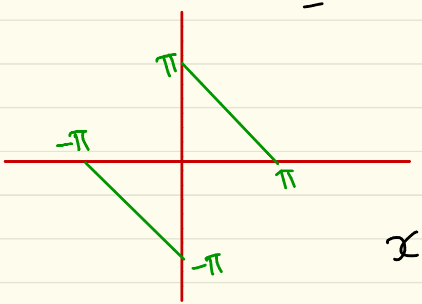
پارسوال حقیقی

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin n\theta)^2\,d\theta = \sum \pi b_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta = \sum b_n^2 = \frac{64}{\pi^2} \sum_{n \text{ فرد}} \frac{1}{n^6}$$

---

(8) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ در $(0,\pi)$ و به صورت فرد در $(-\pi,\pi)$ توسیع دهید. سری فوریه



$$f(x) \sim \frac{1}{2i} \sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$$

نشان دهید این سری برای هر x همگرا است.

$$x=0 \Rightarrow \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \frac{1}{n} = 0$$

آزمون دیریکله: مجموعه‌های جزئی $\sum b_n$ کران‌دار باشند و $a_n \downarrow 0$ آنگاه $\sum a_n b_n$ همگرا است.

تنها کافیست $\sum_{|n|\le N} e^{inx}$ کران‌دار باشد $\Leftarrow$

$$\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

برای هر $x\neq 0$ ثابت این دنباله کران‌دار است.

$$f(x)=\chi_{[a,b]}(x)\ , \quad [a,b]\subset[-\pi,\pi] \qquad (9)$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_a^b=\frac{e^{-ina}-e^{-inb}}{2\pi i n} \qquad n\neq 0$$

$$f(x)\sim \frac{b-a}{2\pi}+\sum_{n\neq 0}\frac{e^{-ina}-e^{-inb}}{2\pi i n}\,e^{inx}$$

این سری برای $a<x<b$ به $f(x)=1$ همگراست و در خارج این بازه به صفر

برای $x=a$ یا $x=b$ به $1/2$.

شرط همگرایی مطلق سری فوریه :

$$\sum_{n\neq 0}\frac{|e^{-ina}-e^{-inb}|}{|n|}$$

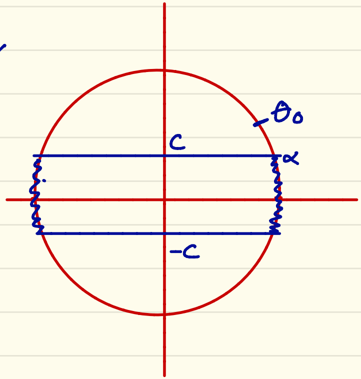
$$|e^{-ina}-e^{-inb}|^2=|e^{in(b-a)}-1|^2=\big|[\cos(n(b-a))-1]+i\sin(n(b-a))\big|^2$$

$$=2-2\cos n(b-a)$$

$$\left|e^{-ina}-e^{-inb}\right| = 2\left|\sin\frac{n(b-a)}{2}\right| = 2\left|\sin n\theta_0\right| \qquad \pi > \theta_0 = \frac{b-a}{2} > 0$$

$$? \ \sum_{n>0} \frac{|\sin n\theta_0|}{n}$$

سؤال : شرط همگرایی



$$0 < 2\alpha < \theta_0 \ , \qquad \pi - 2\alpha > \theta_0$$

بین $n\theta_0$ و $(n+1)\theta_0$ هر دو زاویه ←

نمی‌توانند در قطاع‌های آبی رنگ قرار بگیرند.

$$\sum_{n>0}\frac{|\sin n\theta_0|}{n} = \left(\frac{|\sin\theta_0|}{1} + \frac{|\sin 2\theta_0|}{2}\right) + \left(\frac{|\sin 3\theta_0|}{3} + \frac{|\sin 4\theta_0|}{4}\right) + \cdots$$

$$> \frac{c}{2} + \frac{c}{4} + \frac{c}{6} + \cdots = \frac{c}{2}\sum\frac{1}{n}$$

$b-a=2\pi$

تنها حالتی که نمی‌توان α را انتخاب کرد این است که $\theta_0=0$ یا $\theta_0=\pi$. یعنی $a=b$ یا

تذکر: به کمک قضایای همگرایی سری فوریه در فصل ۳ می‌توان دید که اگر سری همگرایی مطلق باشد باید حد آن نیز یک تابع پیوسته باشد یعنی $f(x)$ تابع پیوسته باشد. که همین نتیجه مطلب به دست آید.

---

(۱۳) (a) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S \Longleftarrow$ سری جمع‌پذیر آبل است به S. یعنی $A_r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n$, $\lim_{r\to 1} A_r = S$

فرض کنید $S=0$.

$$S_n = c_1 + \cdots + c_n \longrightarrow 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{N} S_n r^n + S_N r^{N+1}$$

$N\to\infty$ میل $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n$. $\left(S_N \to 0 \ , r^{N+1}\to 0\right)$

$$s_n \to 0 \Rightarrow \forall \epsilon>0 \ \exists M , \ n>M \quad |s_n| \le \epsilon$$

$$|A_r| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n\right| \le |1-r| \left|\sum_{n=1}^{M} s_n r^n\right| + \underbrace{|(1-r)|\sum_{n=M+1}^{\infty} \epsilon |r^n|}_{\epsilon r^{M+1}}$$

$$\limsup_{r\to 1}|A_r| \le \epsilon \Rightarrow$$ ϵ دلخواه است پس $\lim A_r = 0$

(c) $\sum c_n$ جمع‌پذیر چزارو به σ $\Rightarrow$ $\sum c_n$ جمع‌پذیر آبل است به σ.

فرض کنید $\sigma = 0$، $S_n = c_1 + \dots + c_n$ آنگاه $\sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} \to 0$

$$A_r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty} s_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (S_1 + \dots + S_n) r^n$$

رابطه قسمت (a)

رابطه قسمت (a) برای دنباله S_n

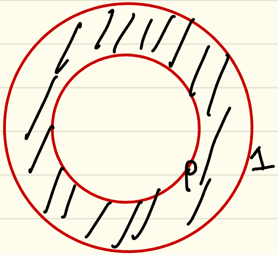
$$= (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n r^n$$

$\forall \epsilon \exists M : n \ge M, |\sigma_n| \le \epsilon$

$$|A_r| \le (1-r)^2 \left|\sum_{n=1}^{M} n\sigma_n r^n\right| + (1-r)^2 \sum_{n=M}^{\infty} \epsilon n r^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2} \Rightarrow \limsup_{r\to 1} |A_r| \le \epsilon$$

۱۴



$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \rho < r < 1 \\ u(1,\theta) = f(\theta) = \sum a_n e^{in\theta} \\ u(\rho,\theta) = g(\theta) = \sum b_n e^{in\theta} \end{cases}$$

$$u(r,\theta) = \sum c_n(r)\, e^{in\theta}$$

$$\Rightarrow \quad c_n(1) = a_n, \quad c_n(\rho) = b_n$$

$n \neq 0$ برای $\quad c_n(r) = \dfrac{1}{\rho^n - \rho^{-n}} \left[\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \right) a_n + (r^n - r^{-n}) b_n \right]$

$$c_0(r) = a_0 + (b_0 - a_0) \frac{\log r}{\log \rho}$$

$$u(r,\theta) - (P_r * f)(\theta) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad r \longrightarrow 1$$

$$(P_r * f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

$$(b_0 - a_0)\frac{\log r}{\log \rho} + \sum_{n \neq 0} \left[c_n(r) - r^{|n|} \right] e^{in\theta} \longrightarrow 0$$

آزمون وایرشتراس: اگر $|f_n(x)| \leq M_n \ , \ \sum M_n < \infty$

آنگاه $\sum f_n(x)$ همگرای یکنواخت است و در نتیجه $\sum f_n$ پیوسته است.

$$\lim_{x \to 1} \left[\sum f_n(x) \right] = \sum f_n(1)$$

לכל $n>0$ נקבל:

$$c_n(r)-r^n=\frac{\left[\left(\rho/r\right)^n-\left(r/\rho\right)^n\right]a_n+\left[r^n-r^{-n}\right]b_n}{\rho^n-\rho^{-n}}-r^na_n$$

$$\frac{r^n-r^{-n}}{\rho^n-\rho^{-n}}=\frac{r^{2n}-1}{\rho^{2n}-1}\cdot\frac{\rho^n}{r^n}\leq\frac{1}{1-\rho^2}\cdot\left(\rho/r\right)^n$$

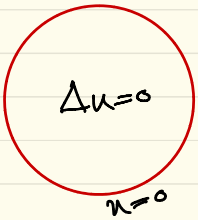
$$\frac{\left(\rho/r\right)^n-\left(r/\rho\right)^n}{\rho^n-\rho^{-n}}-r^n=\frac{\left(\rho/r\right)^{2n}-1}{\rho^{2n}-1}\cdot\frac{\rho^n}{\left(\rho/r\right)^n}-r^n$$

$$=\left[\frac{1-\left(\rho/r\right)^{2n}}{1-\rho^{2n}}-1\right]r^n$$

$$\leq\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^2}r^n=\frac{\left(\rho^2r\right)^n}{1-\rho^2}$$

(۱۸) $u(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}P_r$ نشان دهید $\Delta u=0$ در $0\le r<1$ و

برای هر θ داریم $\lim_{r\to 1} u(r,\theta)=0$



$$P_r(\theta)=\sum_n r^{|n|}e^{in\theta}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

برای $r<1$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}P_r(\theta)=\sum_n n\,r^{|n|}e^{in\theta}$$

$$\Delta\Big(\underbrace{\underbrace{r^n e^{in\theta}}_{z^n}-\underbrace{r^{+n}e^{-in\theta}}_{\bar z^n}}_{\mathrm{Im}(z^n)}\Big)=0$$

جمع n و $-n$ با هم

از طرف دیگر

$$u(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right]$$

$$= \frac{-(1-r^2)(+2r\sin\theta)}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$$

اگر $\theta\neq 0$ واضح است که حد عبارت بالا وقتی $r\to 1$ برابر صفر است.

اگر $\theta=0$ ، داریم $u(r,\theta)=0$ برای هر $0\leq r<1$

هم چنین برای هر θ داریم $\lim_{r\to 1} u(r,\theta)=0$ ولی این همگرایی یکنواخت

نیست. در واقع u در نقطه $r=1$ و $\theta=0$ پیوسته نیست.

آنالیز فوریه

جلسه دوازده ۹۶/۸/۶

تمرین فصل ۳

۱۵ (b) f تابع هولدر است

$$|f(x+h)-f(x)| \leq C|h|^{\alpha}$$

نشان دهید $\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|^{\alpha}}\right)$

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \underset{x=y+\pi/n}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+\pi/n)\,e^{-iny}\cdot \underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1}\,dy$$

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f(x+\pi/n)\right]e^{-inx}\,dx$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f(x+\pi/n)\right|dx \leq \frac{C}{4\pi}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\times 2\pi$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

(c) تابع $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$ هولدر از مرتبه α است و $\hat{f}(N) = \frac{1}{N^\alpha}$ برای $N = 2^k$.

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \left[e^{i2^k(x+h)} - e^{i2^k x} \right] \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \underbrace{\left| e^{i2^k h} - 1 \right|}_{2|\sin(2^{k-1}h)|}$$

$|\sin x| \leq |x|$

$$\leq \sum_{k=0}^{K_0} 2^{-k\alpha} \times 2 \times 2^{k-1} h + \sum_{K=K_0+1}^{\infty} 2^{-k\alpha+1}$$

$2^{K_0-1}|h| \leq 1 < 2^{K_0}|h|$

$$= h \underbrace{\sum_{k=0}^{K_0} 2^{k(1-\alpha)}}_{\frac{2^{(K_0+1)(1-\alpha)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1}} + \frac{2^{1-(K_0+1)\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}}$$

$$\leq C_1 h \times 2^{K_0(1-\alpha)} + C_2 2^{-K_0\alpha}$$

$$\leq C_1 h \times \frac{1}{|h|^{1-\alpha}} + C_2 |h|^\alpha = \tilde{C} |h|^\alpha$$

(۱۷) f تابع پله‌ای در بازه $[-\pi,\pi]$ ثابت کنید $\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

اثبات: ① اگر $f=\chi_{[a,b]}$ $\Leftarrow$ $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx}\,dx=\frac{e^{-inb}-e^{-ina}}{-in}$ $\Leftarrow$ $\hat{f}(n)=O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

② اگر $f=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{[a_k,a_{k+1}]}$ و صعودی: $\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_N$

$$-\pi=a_1\le a_2\le\cdots\le a_{N+1}=\pi$$

$|n\hat{f}(n)|\le C\|f\|_\infty$ که ثابت C مستقل از n,f است.

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\int_{a_k}^{a_{k+1}}e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\,\frac{e^{-ina_{k+1}}-e^{-ina_k}}{-in}$$

$$=\frac{1}{-2\pi in}\sum_{k=1}^{N}(\alpha_{k-1}-\alpha_k)e^{-ina_k}$$

$$|n\hat{f}(n)|\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|\alpha_{k-1}-\alpha_k|=\frac{1}{2\pi}\sum^{N}_{k=1}(\alpha_k-\alpha_{k-1})=\frac{\alpha_N-\alpha_1}{2\pi}$$

$$\le\frac{\|f\|_\infty}{\pi}$$

۳) اگر f یک تابع دلخواه باشد دنباله f_n از توابع قطعه‌قطعه ثابت وجود دارد که

$$\|f_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{و} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f_m - f|\,dx \longrightarrow 0$$

$$f_m(x) = \sum_{k=-n}^{n-1} \chi_{\left[\frac{k\pi}{m}, \frac{(k+1)\pi}{m}\right]} \, f\left(\frac{(k+1)\pi}{m}\right)$$

بنابر تست قبل $\left| n \hat{f}_m(n) \right| \leq \dfrac{\|f_m\|_\infty}{\pi} \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{\pi}$ ولی از طرفی $\lim\limits_{m\to\infty} \hat{f}_m(n) = \hat{f}(n)$

فصل ۵ تبدیل فوریه:

تابع f در بازه $[-\pi,\pi]$ توسیع شده است سری فوریه به صورت

2π تابع تناوبی با دوره تناوب $\leftarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$

اگر تابع f در بازه $[-l,l]$ توسیع شده باشد، آنگاه سری فوریه به صورت

2l تابع تناوبی با دوره تناوب $\leftarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$, $c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}\, dx$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\, e^{\frac{in\pi}{l}(x-y)}\, dy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{l} F_l\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$

اگر f مشتق پذیر باشد این تساوی برقرار است

$$F_l(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy$$

$$F_\ell(\omega) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy = F(\omega)$$

برای مقادیر خیلی بزرگ ℓ

$$f(x) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy\, d\omega$$

تبدیل فوریه:

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \hat{f}(n)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \approx \sum \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

از کتاب:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx$$ ← تبدیل فوریه

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\xi}\, d\xi$$ ← تبدیل وارون

سؤال ①: رابطه تبدیل وارون برای چه مقادیری از x (تحت چه شرایطی روی تابع f) برقرار است؟

② برای چه توابعی تبدیل فوریه تعریف می‌شود؟ انتگرال ناسره فوق تحت چه شرایطی تعریف می‌شود؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \cdots = p.v.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} f(x)\,dx + \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{0} f(x)\,dx$$

اگر $f \geq 0$ دو تعریف بالا معادل هستند

همچنین اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ هر دو تعریف فوق معادل هستند. مجموعه همه این توابع را $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ نامگذاری می‌کنیم.

تعریف: تابع f را به طور یکنواخت کاهشی گوییم هرگاه ثابت $A>0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2}\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$\int|f(x)|\,dx\le A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=A\tan^{-1}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=A\pi$$

گزاره: (خواص انتگرال ناسره) فرض کنید $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ آنگاه

① $$\int_{-\infty}^{+\infty}(af(x)+bg(x))\,dx=a\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,dx$$ (خطی بودن)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[af(x)+bg(x)]\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}(af+bg)\,dx=\lim_{N\to\infty}\left[a\int_{-N}^{N}f(x)\,dx+b\int_{-N}^{N}g(x)\,dx\right]$$

$$= a \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx + b \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} g(x)\,dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$ (انتقال) 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\,dx$$ $\lambda>0$ (تجانس) 3

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h) - f(x)|\,dx = 0$$ (پیوستگی) 4

$$\int_{-N}^{N} |f(x-h) - f(x)|\,dx + \int_{|x|>N} \underbrace{|f(x-h) - f(x)|}_{\leq |f(x-h)| + |f(x)|}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty \implies \forall \epsilon\ \exists N : \int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx < \epsilon$$

از اونجا اگر f پیوسته باشد روی $[-N,N]$ پیوسته یکنواخت است و δ وجود دارد که اگر

$$|h| < \delta \implies |f(x-h) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2N} \quad \forall x \in [-N,N]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h) - f(x)|\, dx \leq \int_{|x|\leq N} |\cdots|\, dx + \int_{|x|\geq N} |f(x)| + |f(x-h)|\, dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq N} \frac{\epsilon}{2N}\, dx + 2\epsilon = 3\epsilon$$

اگر f پیوسته نباشد آنگاه دنباله توابع پیوسته g_k وجود دارند که $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x) - f(x)|\, dx \to 0$

آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-f(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-g_k(x-h)|\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x-h)-g_k(x)|\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x)-f(x)|\,dx$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x)-f(x)|\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x-h)-g_k(x)|\,dx$$

$$\limsup_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-f(x)|\,dx \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(x)-f(x)|\,dx \qquad \forall k$$

اکنون $k\to\infty$ تا نتیجه حاصل شود.

آنالیز فوریه

جلسه سیزده ۱۳/۸/۹۶

$$\mathcal{L}^1 := \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$$

$\mathcal{L}^\infty := \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid$ f کران‌دار است یعنی ثابت $M>0$ وجود دارد به طوری که $|f(x)|\le M$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ $\}$

$\mathcal{F}: \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{L}^\infty$ نگاشت تبدیل فوریه

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

$$|\hat{f}(\omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1}$$

اگر $f\in\mathcal{L}^1$ باشد، آنگاه $\hat{f}\in\mathcal{L}^\infty$ و $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$.

خواص تبدیل فوریه:

(۱) اگر $f \in L^1$ آنگاه $\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i h \omega}$ به ازای هر $h \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f(x+h)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i (x-h)\omega}\, dx = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i h \omega}$$

(۲) اگر $f \in L^1$ آنگاه $\mathcal{F}(f(x)\, e^{-2\pi i x h}) = \hat{f}(\omega + h)$ به ازای هر $h \in \mathbb{R}$.

(۳) $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \delta^{-1} \hat{f}(\delta^{-1} \omega)$

$$\mathcal{F}(f(\delta x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i y \omega/\delta}\, \frac{dy}{\delta} = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$

(۴) اگر $f \in L^1$ و مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\mathcal{F}(f') = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega)$

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \omega}\, dx = \underbrace{f(x)\, e^{-2\pi i x \omega} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, (-2\pi i \omega)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

چون $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

(۵) مشتق تبدیل فوریه

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx\right]$$

$$\overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega}\left(f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi i x\, f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = -2\pi i\, \mathcal{F}(x f(x))$$

شرط جابجایی مشتق و انتگرال:

$$K(\omega) = \int K(x,\omega)\, dx$$

اگر تابع در مشتق $K(x,\omega)$ نسبت به ω مشتق‌پذیر باشد و $\left|\frac{\partial}{\partial\omega} K(x,\omega)\right|$ انتگرال‌پذیر

آنگاه تابع $K(\omega)$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با

$$\frac{d}{d\omega} K(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial\omega} K(x,\omega)\, dx$$

$$\frac{d}{d\omega}K(\omega) = \lim_{h\to 0} \frac{K(\omega+h)-K(\omega)}{h} = \lim_{h\to 0}\int \underbrace{\frac{K(\omega+h,x)-K(\omega,x)}{h}}_{\frac{\partial}{\partial\omega}K(\omega,x)} dx$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial\omega}K(\omega,x)\,dx$$

بنابر قضیه همگرایی لبگ

شرط لازم مشتق‌پذیری تبدیل فوریه $\Longrightarrow$ $xf(x)\in\mathcal{L}^1$

تعریف (فضای شوارتز) تابع هموار $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را عضو فضای شوارتز گوییم هرگاه به ازای هر $0\le k,l$ داشته باشیم

$$M_{k,l}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k f^{(l)}(x)\right|<\infty$$

این فضا را با $S(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

مثال- $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$ $\leftarrow$ توابع هموار با تکیه‌گاه فشرده. (خارج از یک مجموعه کران‌دار تابع صفر است)

مثال- $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

نکته: $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow M_{2,0} = \sup |x^2 f(x)| < \infty \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{M_{2,0}}{|x|^2}$$

$$\int |f(x)|\,dx \leq \int_{|x|\leq 1} |f(x)|\,dx + M_{2,0} \int_{|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^2} < \infty$$

نکته- اگر $f \in S$ آنگاه $f' \in S$. همچنین $x^l f^{(l)}(x) \in S$.

S فضای برداری است.

قضیه: تبدیل فوریه $\mathcal{F}: S \longrightarrow S$ یک به یک و پوشا است.

$$f \in S \overset{?}{\Longrightarrow} \hat{f} \in S \Longleftrightarrow \left| \omega^k \frac{d}{d\omega^l} \hat{f} \right| < \infty \quad \forall k, l$$

$$\omega^k \mathcal{F}\left[(-2\pi i x)^l f(x)\right] = \frac{1}{(2\pi i)^k} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx^k}\left((-2\pi i x)^l f(x)\right)\right]$$

فرض کنید بدانیم که رابطه فرمول وارون $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega$ برای هر $f \in S$ برقرار باشد.

به کمک آن یک به یکی و پوشا بودن تبدیل فوریه را ثابت می‌کنیم.

$$\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\hat{f}(\omega)}_{\hat{g}(\omega)}\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = g(x)$$

$$f \in S \Rightarrow g(\omega) = \hat{f}(-\omega) \Rightarrow \mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = f(\omega)$$

تبدیل فوریه تابع گاوسی : $\mathcal{F}(e^{-x^2}) = ?$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \Rightarrow I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\theta\,dr = \pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2\pi i x\omega}\,dx \Rightarrow \hat{f}(0) = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i x)\, e^{-x^2-2\pi i x\omega}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi i)\frac{d}{dx}(e^{-x^2})\cdot e^{-2\pi i x\omega}\,dx$$

$$= (\pi i)\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}(e^{-x^2})\right) = \pi i \times (2\pi i\omega)\,\mathcal{F}(e^{-x^2}) = -2\pi^2\omega\,\hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)\,e^{-\pi^2\omega^2} = \sqrt{\pi}\,e^{-\pi^2\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\big(f(\delta x)\big) = \delta^{-1}\, \hat{f}\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$$

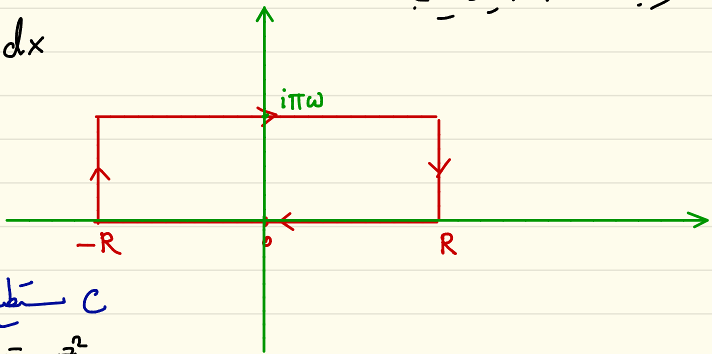
$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(e^{-\delta^2 x^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\delta}\; e^{-\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 \omega^2}$$

$$\delta = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right) = e^{-\pi \omega^2}$$

خاصیت تبدیل فوریه

راه حل دیگر برای محاسبه تبدیل فوریه تابع گاوسی :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\pi i \omega)^2}\; e^{-\pi^2\omega^2}\, dx$$



$$0 = \int_C e^{-z^2}\, dz$$

c مستطیل با جهت مشخص شده در شکل بالا است.

چون e^{-z^2} تابع تحلیلی است انتگرال فوق برابر صفر است.

از طرف دیگر آن انتگرال را باز کنیم :

$$0=\int_{R}^{-R} e^{-x^2}\,dx+\int_0^{\pi\omega} e^{-(-R+iy)^2}\,dy+\int_{-R}^{R} e^{-(x+i\pi\omega)^2}\,dx$$

$$+\int_{\pi\omega}^{0} e^{-(R+iy)^2}\,dy$$

اگر $R\to\infty$ خواهیم داشت:

$$0=\underbrace{-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{-\sqrt{\pi}}+e^{\pi^2\omega^2}\hat{f}(\omega)+\underbrace{\lim_{R\to\infty}\Bigg[\underbrace{\int_0^{\pi\omega} e^{-R^2+y^2+2Riy}-e^{-R^2+y^2-2Riy}\,dy}_{O(e^{-R^2})}\Bigg]}_{=0}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{f}(\omega)=\sqrt{\pi}\;e^{-\pi^2\omega^2}$$

آنالیز فوریه

جلسه چهارده ۹۶/۸/۱۵

$$K(x) = e^{-\pi x^2} \implies \hat{K}(\omega) = e^{-\pi \omega^2}$$

$$K_\delta(x) = \delta^{-1/2} K\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) \implies \hat{K}_\delta(\omega) = \hat{K}(\sqrt{\delta}\,\omega) = e^{-\pi \delta \omega^2}$$

قضیه: توابع $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ یک خانواده از هسته‌های خوب هستند، یعنی $M>0$ وجود دارد که

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)\,dx = 1$$

(ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_\delta(x)|\,dx \leq M \qquad \forall \delta$$

(iii) $$\forall \eta > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\,dx = 0$$

اثبات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{-1/2} e^{-\frac{\pi}{\delta} x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{-1/2} e^{-y^2} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\,dy$$

$$= 1$$

(ii) $\quad K_\delta \geq 0 \implies M=1$

(iii) $$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\,dx = \int_{|x|>\eta} \delta^{-1/2} e^{-\frac{\pi}{\delta}x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|y|>\eta\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}} e^{-y^2}\,dy \longrightarrow 0$$

وقتی $\delta \to 0$

تعریف: $$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

قضیه: اگر $f \in S(\mathbb{R})$، آنگاه $(f*K_\delta)(x) \longrightarrow f(x)$ به طور یکنواخت وقتی $\delta \to 0$.

اثبات.

$$\left|(f*K_\delta)(x) - f(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x-t) - f(x)\right) K_\delta(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t)\,\left|f(x-t) - f(x)\right|\,dt$$

$$= \int_{|t|\leq\eta} + \int_{|t|>\eta} K_\delta(t)\,\left|f(x-t)-f(x)\right|\,dt$$

$$\int_{|t|>\eta} K_\delta(t)\,|f(x-t)-f(x)|\,dt \le 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta} K_\delta(t)\,dt \xrightarrow{\text{وقتی } \delta\to 0} 0$$

بنابر خاصیت (iii)

$$\int_{|t|<\eta} K_\delta(t)\,|f(x-t)-f(x)|\,dt \le \int_{|t|<\eta} \epsilon\, K_\delta(t)\,dt \le \epsilon\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(t)\,dt = \epsilon$$

$$\forall \epsilon\ \exists \eta : |t|<\eta \Longrightarrow |f(x-t)-f(x)|<\epsilon$$

پیوستگی یکنواخت

وقتی $f\in S$ نتیجه می‌شود که $|f|$ کران‌دار است، و در نتیجه تابع f پیوسته یکنواخت است.

تذکر: در اثبات قبل اگر $f\in \mathcal{L}^1$ و تابعی کران‌دار باشد، همگرایی $(f*K_\delta)(x) \longrightarrow f(x)$ در نقاط پیوستگی f برقرار است. در واقع در قضیه قبل تنها کافی است که f پیوسته یکنواخت و انتگرال‌پذیر باشد.

گزاره: اگر $f,g\in S(\mathbb{R})$ آنگاه

(i) $f*g\in S(\mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{F}(f*g)=\hat{f}\,\hat{g}$

$$\frac{d^k}{dx^k}(f*g)(x)=\frac{d^k}{dx^k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x-t)\,g(t)\,dt$$

$$=(f^{(k)}*g)(x)$$

ولی چون $f\in S$ آنگاه $f^{(k)}\in S$. بنابراین اگر بدانیم $\left|x^l\,(f*g)(x)\right|$ برای هر دو تابع دلخواه $f,g\in S$ کران‌دار است آنگاه (i) اثبات می‌شود.

$$|x^l (f*g)(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x^l| \, |f(x-t)| \, |g(t)| \, dt$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l f(x-t)| \le A(1+|t|^l)$ به طور مشابه

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(y+t)^l f(y)| \le C \sup_{y\in\mathbb{R}} (|y|^l + |t|^l)|f(y)|$$

$$\le C \sup_{y\in\mathbb{R}} |y|^l |f(y)| + C|t|^l \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y)|$$

$$\le A(1+|t|^l)$$

$$\Rightarrow |x^l (f*g)(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} A(1+|t|^l)|g(t)| \, dt < \infty$$

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

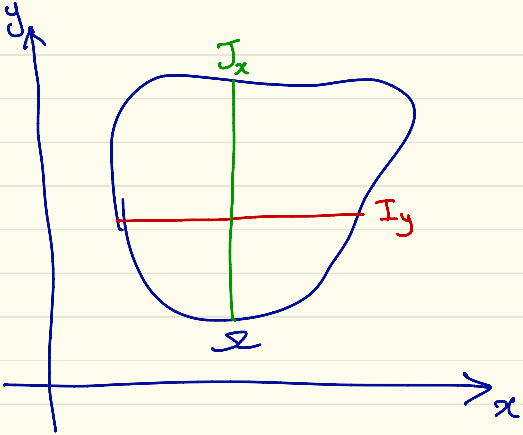
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dt\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, e^{-2\pi i (x-t)\omega}\, dx\; g(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i y\omega}\, dy\right]}_{\hat{f}(\omega)} g(t)\, e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

$$= \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$$

قضیه فوبینی



$$\int_\Omega |K(x,y)|\, dA < \infty$$

$$I_y = \Omega \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$$

$$J_x = \Omega \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$$

$$\int_\Omega K(x,y)\, dA = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{J_x} K(x,y)\, dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{I_y} K(x,y)\, dx \right] dy$$

گزاره: $f, g \in S \Rightarrow$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-2\pi i x y}\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(y)\,e^{-2\pi i x y}\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

قضیه: اگر $f \in S$ آنگاه
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\,d\omega$$

اثبات - ابتدا برای $x=0$ ثابت می‌کنیم:
$$f(0) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,d\omega$$

$$G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2} \Rightarrow \hat{G}_\delta = K_\delta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,G_\delta(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{G}_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,K_\delta(x)\,dx$$
$$= (f * K_\delta)(0)$$

اگر $\delta \to 0$ خواهیم داشت $(f * K_\delta)(0) \longrightarrow f(0)$ و از طرفی

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, G_\delta(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, d\omega$$

جابجایی حد و انتگرال مجاز است بنابر قضیه همگرایی لبگ

فرمول تبدیل وارون در نقطه دلخواه :

$$\hat{g}(\omega) = e^{2\pi i x \omega}\, \hat{f}(\omega) \Longleftarrow g(y) = f(x+y)$$

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega$$

آنالیز فوریه

جلسه پانزده ۹۶/۸/۲۰

تذکر: از اثبات فرمول تبدیل وارون فوریه

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega$$

مشخص است که برای برقراری این رابطه باید دو مطلب زیر درست باشد:

1) $(f * K_\delta)(x) \longrightarrow f(x)$ همگرایی نقطه‌وار

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, G_\delta(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \hat{G}_\delta(x)\, dx$$

$$G_\delta(x) = e^{-\pi \delta x^2} \quad , \quad \hat{G}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\pi x^2/\delta}$$

بنابر نتیجه در جلسه گذشته گفته شد، وقتی $f \in L^1$ و کران‌دار در نقاط پیوستگی f شرط (1) برقرار است.

همچنین از قوی نتیجه می‌شود که شرط (2) برقرار است هرگاه $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, e^{-\pi x^2/\delta}\, dx < \infty$

و این به وضوح برقرار است چون $e^{-\pi x^2/\delta} < 1$ و $f \in L^1$.

نتیجه: اگر $f \in \mathcal{L}^1$ و کران‌دار، آنگاه $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega$ در نقاط پیوستگی f.

تعریف: (فضای $\mathcal{L}^2$)

$$\mathcal{L}^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} \chi_{(-1,1)} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} \chi_{(1,\infty)} \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$$

در واقع فضای $\mathcal{L}^2$ یک فضای ضرب داخلی با نرم

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx \right]^{1/2}$$

و ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

است.

نامساوی کوشی-شوارتز

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2}\cdot\|g\|_{\mathcal{L}^2}$$

نکته: $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

نکته: $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty \subseteq \mathcal{L}^2$

توابع کران‌دار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_\infty \cdot \|f\|_{\mathcal{L}^1} < \infty$$

مثال- $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta} \in \mathcal{L}^2$

گزاره: اگر $f \in \mathcal{L}^2$ آنگاه $\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$ در نقاط پیوستگی f.

اثبات- مشابه قضیه جلسه قبل تنها باید نشان دهیم

$$\int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)|^2 dt \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

$(|K_\delta| \leq 1)$

$$\int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)|^2 dt \leq \int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)|\, dt \longrightarrow 0$$

قضیه: اگر $f\in\mathcal{L}^2$ آنگاه فرمول تبدیل وارون فوریه در نقاط پیوستگی f برقرار است.

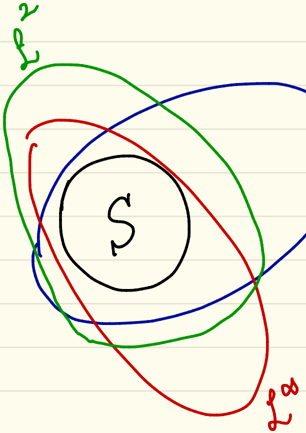
اثبات- دو شرط (1) و (2) که در صفحه اول گفته شد برقرار است.

شرط (1) که در صفحه قبل است.

شرط (2)

$$\int |f(x)|\, e^{-\pi x^2/8}\, dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2}\cdot \|e^{-\pi x^2/8}\|_{\mathcal{L}^2}$$

نامساوی کوشی شوارتز



قضیه: اگر $f\in S$ آنگاه

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2}=\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2}$$

اثبات- به کمک رابطه زیر از جلسه قبل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

قرار دهیم $g=\overline{\hat{f}}$. تنها کافیست نشان دهیم $\hat{g}=\overline{f}$

$$g(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} = \int \overline{f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}}\, dx = \int \overline{f(x)}\, e^{2\pi i x\omega}\, dx$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx$$ بنابر فرمول تبدیل وارون

$$\Longrightarrow \quad \hat{g} = \overline{f}$$

نکته: $\mathcal{F}: S \subseteq \mathcal{L}^2 \longrightarrow S$ حافظ نرم است. از طرفی S که یک زیرمجموعه چگال در $\mathcal{L}^2$ است یعنی برای هر $f \in \mathcal{L}^2$ دنباله $g_n \in S$ وجود دارد که $\|f - g_n\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0$.

$$\hat{g}_n = \mathcal{F}(g_n) \quad , \quad \|\hat{g}_n - \hat{g}_m\|_{\mathcal{L}^2} = \|g_n - g_m\|_{\mathcal{L}^2}$$

درنتیجه دنباله $\{\hat{g}_n\}$ در $\mathcal{L}^2$ کوشی است و دارای حد است. تعریف کنید:

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n \in \mathcal{L}^2$$

اثبات متفاوت برای قضیه وایراشتراس :

قضیه : f یک تابع پیوسته در $[a,b]$ باشد. آنگاه برای هر $\epsilon>0$ ، چندجمله ای P وجود دارد که

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-P(x)| < \epsilon$$

اثبات : بازه $[a,b] \subseteq (-M,M)$ و تابع g را بدین صورت تعریف کنید. $g=f$ در $[a,b]$

$g=0$ در $|x|\geq M$.

g تابع پیوسته است و $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

$$(g * K_\delta)(x) \xrightarrow{\text{یکنواخت}} g(x)$$

می دانیم

$$K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta} \quad , \quad e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

$$\underbrace{K_\delta(x) = Q_N(x)}_{\text{چندجمله ای}} + \underbrace{R(x)}_{\text{مانده تیلور}} \quad , \quad Q_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

$$(g * Q_N)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, Q_N(x-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sum_{k=0}^{N} a_k (x-t)^k \, dt = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

تنها باید نشان دهیم برای هر $\epsilon > 0$ می‌توان N را آنقدر بزرگ گرفت که

$$\left| (g * R)(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

به ازای هر $|x| \leq M$.

$$\left| (g * R)(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(t)\, R(x-t) \right| dt$$

$$= \int_{-M}^{M} \left| g(t)\, R(x-t) \right| dt \leq \|g\|_\infty \cdot \|R\|_{\mathcal{L}^\infty(-2M,2M)} \times 2M$$

کافی است N را به اندازه کافی بزرگ بگیریم که $\|K_\delta - Q_N\| < \frac{\epsilon}{4\|g\|_\infty M}$.

آنالیز فوریه

جلسه شانزده - ۹۶/۸/۲۲

کاربردِ تبدیلِ فوریه:

معادله گرما در $\mathbb{R}$. $u(x,t)$: دما در نقطه x در زمان t

$$u_t = u_{xx} \qquad t>0\,,\ x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

در واقع مدل پخش ذرات را روی خط $\mathbb{R}$ توصیف می‌کند که در هر گام زمانی با احتمال $\frac{1}{2}$ به راست یا به چپ جابجا می‌شوند.

$$u(x,0) = g(x) \longrightarrow \text{شرط اولیه} \qquad (2)$$

$\Delta x =$ طول گام‌های مکانی. در واقع هر ذره از نقطه x به $x\pm\Delta x$ منتقل می‌شود.

$\Delta t =$ فاصله‌ای زمانی

اگر فرض کنیم $(\Delta x)^2=\Delta t$ آنگاه معادله (1) به دست می‌آید.

$$\hat{u}(\omega,t) := \mathcal{F}(u(\cdot,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

با فرض اینکه $u(x,t)$ تبدیل فوریه دارد.

$$(1) \Longrightarrow \quad \mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(u_{xx})$$

به شرط آنکه u_t تبدیل فوریه داشته باشد.

به شرط آنکه u و $u_x \in L^1$ باشند

$$\partial_t \hat{u} = (2\pi i \omega)^2 \hat{u}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{u}(\omega,t) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}\, \hat{u}(\omega,0)$$

$$(2) \Longrightarrow \quad \hat{u}(\omega,0) = \mathcal{F}(g(x)) = \hat{g}(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}\, \hat{g}(\omega)$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2\omega^2 t}\, \hat{g}\right)$$

فرض کنید $\hat{\mathcal{H}}_t = e^{-4\pi^2 \omega^2 t}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \mathcal{H}_t * g$$

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \leftarrow \text{هسته گرما (Heat Kernel)}$$

قضیه: اگر $g \in S(\mathbb{R})$ و $u(x,t) = \mathcal{H}_t * g$ آنگاه

(i) $u \in C^\infty$ برای $x \in \mathbb{R}$ و $t > 0$ و در معادله گرما (1) صدق می‌کند.

(ii) وقتی $t \to 0$ همگرا $u(x,t) \to g(x)$ به طور یکنواخت برقرار است.

(iii) $$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t) - g(x)|^2 \, dx = 0$$

اثبات- (i) و (ii) واضح است.

برای اثبات (iii) دقت کنید که:

$$\hat{u} = \hat{\mathcal{H}}_t \cdot \hat{g} = e^{-4\pi^2\omega^2 t}\,\hat{g}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)-g(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega,t)-\hat{g}(\omega)|^2\,d\omega$$

در جلسات قبل نشان دادیم که تبدیل فوریه نرم L^2 را حفظ می‌کند.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-4\pi^2\omega^2 t}-1\right|^2 |\hat{g}(\omega)|^2\,d\omega$$

بنابر قضیه همگرایی لبگ می‌توان حد و انتگرال جابجا کرد.

$$\left|e^{-4\pi^2\omega^2 t}-1\right|^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \le |\hat{g}(\omega)|^2$$

و چون $g\in S \Rightarrow \hat{g}\in S \Rightarrow \int |\hat{g}|^2\,d\omega < \infty$ در نتیجه

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-4\pi^2\omega^2 t}-1\right|^2 |\hat{g}(\omega)|^2\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0} |\dots|^2}_{=0} \cdot |\hat{g}(\omega)|^2\,d\omega$$

قضیه همگرایی (تسلطی) لبگ: اگر f_n یک دنباله ای از توابع باشد که به طور نقطه‌ای به تابع f همگرا است و تابع انتگرال‌پذیر g وجود داشته باشد $|f_n| \le g$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)\,dx$$

نکته: نتیجه (i) با شرط $g \in \mathcal{L}^1$ یا $g \in \mathcal{L}^2$ برقرار است.

نتیجه (ii) نیز با شرط $g \in \mathcal{L}^2$ برقرار است.

نکته: اگر $g \in S(\mathbb{R})$ آنگاه تابع $u(\cdot, t)$ نیز در $S(\mathbb{R})$ به طور یکنواخت نسبت به $t > 0$ یعنی

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 < t < T}} |x|^K \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x,t) \right| < \infty$$

نکته: فرآیند پیدا کردن کاندید جواب یک گزاره یکتایی برای جواب ارائه می‌کند:

هر جوابی از معادله گرما (1) با شرط اولیه (2) که در شرایط زیر صدق کند یکتاست.

* u، u_t و u_x تبدیل فوریه داشته باشند.

* $u, u_x \to 0$ وقتی $|x| \to \infty$.

یعنی اگر u و v دو جواب (1) و (2) باشند که هر دو در شرایط بالا صدق کنند آنگاه $u = v$.

از طرف دیگر اگر $g \in S(\mathbb{R})$ آنگاه به وضوح $u = \mathcal{H}_t * g$ در شرایط ذکر شده بالا صدق می‌کند.

قضیه (یکتایی) $u(x,t)$ در $x\in\mathbb{R}$ و $t>0$ تعریف شده و در معادله‌ی گرما (۱) صدق می‌کند. علاوه بر این در $t=0$ پیوسته است و $u(x,0)=0$. اگر $u(\cdot,t)\in S(\mathbb{R})$ آنگاه $u\equiv 0$.

اثبات:

$$E(t):=\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2\,dx \geq 0$$

$$E(0)=0$$

$$\frac{dE}{dt}=\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\overline{\partial_t u(x,t)}+\overline{u(x,t)}\,\partial_t u(x,t)\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}} u\,\overline{\partial_{xx}u}+\overline{u}\,\partial_{xx}u\,dx=-\int_{\mathbb{R}} 2|\partial_x u|^2\,dx\leq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow E \text{ یک تابع نامنفی و نزولی است} \\ E(0)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow E(t)\equiv 0 \text{ برای } t\geq 0 \Longrightarrow u\equiv 0$$

معادله لاپلاس:

در $\mathbb{R}_+^2=\{(x,y): x\in\mathbb{R},\ y>0\}$

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

$$\hat{u}(\omega,y):=\mathcal{F}(u(x,y))=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\,e^{-2\pi i x\omega}\,dx$$

$$0=\mathcal{F}(\Delta u)=\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=-4\pi^2\omega^2\,\hat{u}(\omega,y)+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}(\omega,y)$$

$$\hat{u}(\omega,y)=A(\omega)\,e^{2\pi|\omega|y}+B(\omega)\,e^{-2\pi|\omega|y}$$

اگر u تبدیل فوریه داشته باشد برای هر y ثابت باید $\hat{u}(\omega,y)$ نسبت به ω یک تابع کران دار باشد

بنابراین ضریب $A(\omega)$ در رابطه بالا باید صفر باشد.

$$\hat{u}(\omega,y)=B(\omega)\,e^{-2\pi|\omega|y}$$

$$\|\hat{u}(\cdot,y)\|_{L^\infty} \leq \|u(\cdot,y)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|\,dx$$

$$u(x,0) = f(x) \implies \hat{u}(\omega,0) = \hat{f} = B(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega,y) = \hat{f}(\omega)\, e^{-2\pi|\omega|y}$$

$$u(x,y) = P_y * f$$

هسته پواسون (Poisson kernel) $\longleftarrow$ $P_y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi|\omega|y}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|\omega|y}\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega$

$$= \int_0^{+\infty} e^{2\pi i(x+iy)\omega}\, d\omega + \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi i(x-iy)\omega}\, d\omega$$

$$= \left.\frac{e^{2\pi i(x+iy)\omega}}{2\pi i(x+iy)}\right|_{\omega=0}^{+\infty} + \left.\frac{e^{2\pi i(x-iy)\omega}}{2\pi i(x-iy)}\right|_{\omega=-\infty}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i(x+iy)} + \frac{1}{2\pi i(x-iy)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \times \frac{-x+iy+x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

کاندیدِ جواب :

$$u(x,y) = P_y * f$$

لم ـ هسته پواسون یک هسته خوب است وقتی $y \to 0$.

اثبات ـ i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2z^2+y^2}\,y\,dz$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2} = 1$$

ii) $$P_y(x) > 0 \text{ for } y>0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |P_y(x)|\,dx = 1$$

iii) $$\int_{|x|>\delta} P_y(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{|x|>\delta}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{|z|>\frac{\delta}{y}}\frac{dz}{1+z^2} \longrightarrow 0$$ وقتی $y\to 0$

<u>نتیجه</u>: اگر $f \in S(\mathbb{R})$ و $u(x,y) = (P_y * f)(x)$ آنگاه

(i) $u(x,y)$ یک تابع C^∞ است و در معادله $\Delta u = 0$ در $\mathbb{R}^2_+$ صدق می‌کند.

(ii) $\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$ به طور یکنواخت

$$\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)-f(x)|^2 dx = 0 \qquad (iii)$$

قضیه (یکتایی) فرض کنید u یک تابع C^2 در $\mathbb{R}^2_+$ و پیوسته در $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ باشد که

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad y>0 \,, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0 & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

به‌علاوه $u(x,y)$ در بی‌نهایت صفر می‌شود یعنی $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0$ در این صورت $u\equiv 0$.

نکته: شرط اینکه u در بی‌نهایت صفر شود برای اثبات یکتایی ضروری است. به عنوان مثال $u(x,y)=y$ یک تابع هارمونیک است با شرط مرزی $u(x,0)=0$.

لم (خاصیت مقدار میانگین) اگر u یک تابع هارمونیک در گوی به شعاع R به مرکز (x_0,y_0) باشد، آنگاه

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)\,d\theta \qquad \forall\, r<R$$

نکته: میانگین گیری در لم قبل را به جای روی مرز دایره می توان در داخل دیسک نیز حساب کرد یعنی

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{x^2+y^2\le r^2} u(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \underbrace{\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\sin\theta)}_{\text{بنابر لم فوق}\ \to\ 2\pi\, u(x_0,y_0)}\ \rho\, d\theta\, d\rho$$

اثبات لم: $U(r,\theta):=u(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta) \ \xRightarrow{\Delta u=0}\ \left(\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2+\frac{1}{r}\partial_r+\partial_r^2\right)U=0$

$$\varphi(r):=\int_0^{2\pi} U(r,\theta)\,d\theta \Rightarrow \frac{1}{r}\varphi'+\varphi''=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r}\partial_r U+\partial_r^2 U\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r}\partial_\theta^2 U \, d\theta = -\frac{1}{r}\Big[\underbrace{\cancel{\partial_\theta U(r,2\pi) - \partial_\theta U(r,0)}}_{0}\Big] = 0$$

U نسبت به θ تناوبی است.

$$\Longrightarrow \quad \varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad (r\varphi')' \equiv 0$$

$\Longrightarrow \quad r\varphi'(r) =$ تابع ثابت

$$\Longrightarrow \quad \varphi(r) = c_1 \ln r + c_2$$

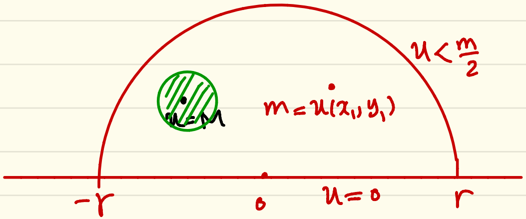
از طرفی $\varphi(0) = 2\pi\, u(x_0, y_0)$ بنابراین باید $c_1 = 0$ ، و φ یک تابع ثابت است.

$$\Longrightarrow \quad \varphi(r) = 2\pi\, u(x_0, y_0) \qquad \forall\, r \geq 0$$

اثبات قضیه کلیدی : بنابر خاصیت مقدار میانگین اگر تابع u در نقطه (x_0,y_0) ماکسیمم یا می‌نیمم موضعی باشد و اگر B_R گوی به شعاع R به مرکز (x_0,y_0) باشد که u در این گوی ماکسیمم (یا می‌نیمم) خود را در (x_0,y_0) می‌گیرد نتیجه می‌شود که u در این گوی مقدار ثابت دارد.

فرض کنید $u\neq 0$ و در نقطه $m=u(x_1,y_1)\neq 0$ همچنین فرض کنید $0<m$ برای سادگی.

چون u در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند مقدار r به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $|u(x,y)|<m/2$ برای $|x|^2+|y|^2>r^2$



بنابراین u ماکسیمم خود را در داخل $B_r\cap\mathbb{R}^2_+$ می‌گیرد.

(دقت کنید $u(x,0)=0$)

$$M=\max_{\mathbb{R}^2} u$$

بنابر نکته ابتدای اثبات اگر $u(x',y')=M$ آنگاه در همسایگی (x',y') مقدار u برابر M است.

بنابراین مجموعه $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; u(x,y) = M \}$ بازاست ازطرفی

چون u تابع پیوسته است و A سطح تراز مقدار M بنابراین A بسته نیز است . بنابر همبندی $\mathbb{R}^2_+$

$A = \mathbb{R}^2_+$. $\Leftarrow$ $u \equiv M$ روی $\mathbb{R}^2_+$ چون u روی $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ پیوسته است و $u(x,0)=0$

بنابراین $u \equiv 0$ روی $\mathbb{R}^2_+$.

آنالیز فوریه

جلسه هفده ۹۶/۸/۲۷

فرمول جمع پواسون :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \qquad f\in S(\mathbb{R})$$

$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

وقتی $f\in S$ سری فوق همگرای یکنواخت است زیرا $|y^2 f(y)|<M$ به ازای هر $y\in\mathbb{R}$.

و در نتیجه F یک تابع پیوسته است. به علاوه $F(x)=F(x+1)$

$$F(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$$

$$c_n = \int_0^1 F(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y)\, e^{-2\pi i n (y-m)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i n y}\, dy = \hat{f}(n)$$

اگر F یک تابع مشتق پذیر باشد آنگاه

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$$

و حالت $x=0$ نتیجه می‌دهد

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

برای اینکه F مشتق پذیر باشد، باید $\sum f'(x+n)$ همگرای یکنواخت باشد و این مطلب از اینکه $f \in S$ است نتیجه می‌شود.

مثال: $\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \Longrightarrow \hat{\mathcal{H}}_t(\omega) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}$

فرمول جمع پواسون $\Longrightarrow$

$$H_t(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_t(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}$$

اگر معادله گرما را روی حلقه درنظر بگیریم یعنی

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<1 \\ u(0,t) = u(1,t) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

تمرین: جواب این مسأله به صورت $u(x,t) = H_t * f$ خواهد بود.

به یک فرمول جمع‌پذیری پواسون نشان می‌دهیم H_t هسته‌ی خوب است و در نتیجه $\lim\limits_{t\to 0} H_t * f = f$.

از آنجا که $\mathcal{H}_t \geq 0$ نتیجه می‌شود که $H_t \geq 0$ و همچنین

$$\int_{|x|\leq \frac{1}{2}} |H_t(x)|\,dx = \int_{|x|\leq 1/2} H_t(x)\,dx = 1$$

$$\int_{\delta<|x|\leq 1/2} H_t(x)\,dx = \underbrace{\int_{\delta<|x|\leq 1/2} \mathcal{H}_t(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{\delta<|x|\leq 1/2} \sum_{|n|\geq 1} \mathcal{H}_t(x+n)\,dx}_{}$$

چون $\mathcal{H}_t$ هسته‌ی خوب است وقتی $t\to 0$

این انتگرال به صفر میل می‌کند.

$|x|\leq 1/2$

$$\sum_{|n|\geq 1} \mathcal{H}_t(x+n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{1\leq |n|} e^{-(x+n)^2/4t} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n|\geq 1} e^{-cn^2/t}$$

در واقع c باید در رابطه $4cn^2 \le (x+n)^2$ برای $1 \le |n|$ صدق کند.

$$e^{-cn^2/t} \le e^{-\frac{c}{2}n^2 - \frac{c}{2}\frac{1}{t}}$$

$$\Rightarrow \sum_{|n|\ge 1} \mathcal{H}_t(x+n) \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{c}{2}\frac{1}{t}}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ t\to 0 \text{ وقتی}}} \cdot \underbrace{\sum_{|n|\ge 1} e^{-\frac{c}{2}n^2}}_{\text{کران‌دار است}}$$

آنالیز فوریه

جلسه هجده ۹۶/۸/۲۹

کاربرد تبدیل فوریه :

قضیه حد مرکزی : اگر $\{X_1, X_2, \dots\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آنگاه $S_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ برای مقادیر بزرگ مثل توزیع نرمال $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است. درواقع $\dfrac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ به توزیع نرمال $N(0,1)$ همگرا است.

فرض کنید $f(x)$ تابع توزیع $\{X_i\}$ باشد، درواقع

$$P(a \le X_i \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

کافی است قضیه را برای $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ثابت کنیم. قرار است ثابت کنیم

$$\sqrt{n} S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

به توزیع نرمال همگرا است یعنی

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le \sqrt{n} S_n \le b) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$p(a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2, \cdots, a_n \le X_n \le b_n)$$

$$= p(a_1 \le X_1 \le b_1)\, p(a_2 \le X_2 \le b_2) \cdots p(a_2 \le X_n \le b_n)$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx\right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx\right)$$

$$p(a \le \sqrt{n} S_n \le b) = P(\sqrt{n}\, a \le X_1 + \cdots + X_n \le \sqrt{n}\, b)$$

$$= \int \cdots \iint_{\substack{\sqrt{n}\, a \le y_1 + y_2 + \cdots + y_n \le \sqrt{n}\, b \\ y_i \in \mathbb{R}}} f(y_n) \cdots f(y_2) f(y_1)\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n$$

$$= \int_{\sqrt{n}\, a}^{\sqrt{n}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_n - z_{n-1}) \cdots f(z_3 - z_2) f(z_2 - z_1) f(z_1)\, dz_1 \cdots dz_n$$

$z_1 = y_1$, $z_2 = y_1 + y_2$, $z_3 = y_1 + y_2 + y_3$, $\cdots$, $z_n = y_1 + \cdots + y_n$

$$= \int_{\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}b} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_n - z_{n-1}) \cdots f(z_3 - z_2) \, (f * f)(z_2) \, dz_2 \cdots dz_n$$

$$= \int_{\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}b} (\underbrace{f * \cdots * f}_{n})(y) \, dy \xrightarrow{?} \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, dx$$

$$\int_a^b (f * \cdots * f)(\sqrt{n}x) \sqrt{n} \, dx \xrightarrow{?} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \chi_{(a,b)}(x) \, dx$$

کافی است ثابت کنیم:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} (f * \cdots * f)(\sqrt{n}x) K(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} K(x) \, dx$$

که $K \in L^2(\mathbb{R})$

$$\Big[(f * \cdots * f)(\sqrt{n}x) \Big]^{\wedge} = \frac{1}{\sqrt{n}} (f * \cdots * f)^{\wedge} \left(\frac{\omega}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\,(f*\cdots*f)(x\sqrt{n})\,K(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\,(f*\cdots*f)(x\sqrt{n})\,(\check{K})^{\wedge}(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\,\left[(f*\cdots*f)(x\sqrt{n})\right]^{\wedge}(\omega)\,\check{K}(\omega)\,d\omega \quad \longleftarrow \quad \text{از رابطه ۱۴}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n} \check{K}(\omega)\,d\omega$$

که $\check{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\,e^{2\pi i x\omega}\,dx$.

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-2\pi i x \frac{\omega}{\sqrt{n}}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[1 - \frac{2\pi i x\omega}{\sqrt{n}} - \frac{2\pi^2 x^2\omega^2}{n} + \delta(x)\right]dx$$

اکنون از روابط $\underset{\text{توزیع احتمالاتی}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$ ، $\underset{\mu=0}{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 0}$ ، $\underset{\sigma^2=1}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 1}$ استفاده کنید:

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{2\pi^2\omega^2}{n} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx}_{e_n}$$

$\delta(x)$ مانده مشتق دوم $e^{-2\pi i x \frac{\omega}{\sqrt{n}}}$ است یعنی $\quad |\delta(x)| = \left|2\pi \frac{\omega x}{\sqrt{n}}\right|^3 / 3!$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^3}{n\sqrt{n}} x^3 f(x)\,dx = C\,\frac{\omega^3}{n\sqrt{n}} \Rightarrow e_n = \delta_n \frac{\omega^3}{n}$$

$\delta_n \to 0$

درنتیجه :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\,(f * \cdots * f)(x\sqrt{n})\,k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \check{k}(\omega)\,d\omega$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{2\pi^2\omega^2}{n} + \underbrace{e_n}_{\delta_n \omega^3/n}\right]^n \check{k}(\omega)\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi^2\omega^2)\,\check{k}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underbrace{(\check{k})^{\wedge}(x)}_{k(x)}\,dx$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ :

$|\psi(x)|^2$ تابع احتمال جرم در نقطه x

$|\hat{\psi}(\omega)|^2$ تابع احتمال تکانه در نقطه x

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\psi(x)|^2\,dx$$

میانگین

$$\text{واریانس جرم} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2\,|\psi(x)|^2\,dx$$

اگر واریانس کوچک شود یعنی این است که با قطعیت بالا در خصوص حضور جرم در نقطه $\bar{x}$ می‌توان اظهار نظر کرد.

$$\bar{\omega} = \int \omega\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\text{واریانس تکانه} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\bar{\omega})^2\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega$$

اصل عدم قطعیت: همزمان نمی‌توان واریانس جرم و واریانس تکانه را کوچک کرد.

در واقع حاصل‌ضرب این دو از یک مقدار ثابت بزرگتر است.

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2|\psi(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\bar{\omega})^2\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega\right)\geq\frac{1}{16\pi^2}$$

با فرض اینکه $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1$ و $\psi\in S(\mathbb{R})$.

کافی است برای $\bar{x}=\bar{\omega}=0$ ثابت کنیم. فرض کنید برای این حالت نامساوی بالا ثابت شده باشد در حالت کلی

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2|\psi(x)|^2\,dx=\int x^2\,|\underbrace{\psi(x+\bar{x})}_{e^{2\pi i x\bar{\omega}}\varphi(x)}|^2\,dx$$

$$\varphi(x):=e^{-2\pi i x\bar{\omega}}\psi(x+\bar{x})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\bar{\omega})^2\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega=\int\omega^2\,|\underbrace{\hat{\psi}(\omega+\bar{\omega})}_{\left[e^{-2\pi i\bar{\omega}x}\psi(x)\right]^{\wedge}(\omega)}|^2\,d\omega$$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{d}{dx}|\psi(x)|^2\,dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\psi\,\overline{\psi}' + \psi'\,\overline{\psi}\right]dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,|x|\cdot|\psi(x)|\cdot|\psi'(x)|\,dx$$

کوشی شوارز

$$\leq 2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi'(x)|^2\,dx}_{\int_{-\infty}^{+\infty}|(\psi')^{\wedge}(\omega)|^2\,d\omega}\right]^{1/2}$$

$$=2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\omega^2\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\right]$$

حالت تساوی:

ψ یک تابع حقیقی است. $\Leftarrow \psi\bar{\psi}' + \bar{\psi}\psi' = \pm 2|\psi|\cdot|\psi'|$

$x>0$ علامت منفی و برای $x<0$ علامت مثبت

$$|\psi'(x)| = \alpha|x\psi(x)|$$

$$\psi(x)\psi'(x) = \pm|\psi(x)|\cdot|\psi'(x)|$$

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \Leftarrow \begin{cases} \psi'(x) = -\alpha x\psi(x) \Leftarrow \psi\cdot\psi'<0 \Leftarrow x>0 \text{ برای} \\ \psi'(x) = -\alpha x\psi(x) \Leftarrow \psi\cdot\psi'>0 \Leftarrow x<0 \text{ برای} \end{cases}$$

$$1 = \int|\psi(x)|^2 dx = A^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = A^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

آنالیز فوریه

جلسه نوزده ۹۶/۹/۴

تبدیلِ فوریه روی $\mathbb{R}^d$.

$$f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i\, x\cdot\omega}\, dx$$

$$\hat{f}:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \cdots, x_d) \qquad \omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$$

$$x\cdot\omega = x_1\omega_1 + \cdots + x_d\omega_d$$

تعریفِ انتگرال روی یک دامنه کران‌دار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ مشابه به یک‌بعدی است. در اینجا Ω را با افراز به مکعب‌های کوچک تقریب می‌زنیم و مجموع ریمان مشابه به حالت یک‌بعدی نوشته می‌شود.

انتگرال روی فضای $\mathbb{R}^d$ به صورت حدی با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty} \int_{Q_N} f(x)\,dx$$

که Q_N مکعب به ضلع N به مرکز مبدأ است یعنی:

$$Q_N = \left(-N/2 , N/2\right)^d$$

اگر $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx < \infty$ آنگاه $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ گوییم و درانصورت تبدیل فوریه f تعریف می‌شود.

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d) =$ فضای توابع کران‌دار

اگر $f \in \mathcal{L}^\infty$ آنگاه

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$$

در نتیجه مشابه تبدیل فوریه در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$$

تعریف (فضای شوارتز)

$$S(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\text{هموار}} \mathbb{R} \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d ,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty \right\}$$

منظور از α و β اندیس‌های چندگانه به صورت d بعدی هستند

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad , \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta := \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + \beta_d}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_d^{\beta_d}}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \quad , \quad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_d$$

$$|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \quad , \quad |x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$$

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha_1 \leq \beta_1 , \alpha_2 \leq \beta_2 , \dots , \alpha_d \leq \beta_d$$

تمرین: اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ آنگاه

$$\forall h \in \mathbb{R}^d \qquad \mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega \cdot h} \qquad (1)$$

$$\mathcal{F}\left(f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot h}\right) = \hat{f}(\omega+h) \qquad (2)$$

$$\mathcal{F}\big(f(\lambda x)\big) = \lambda^{-d}\, \hat{f}(\lambda^{-1}\omega) \qquad (3)$$ برای هر $\lambda > 0$.

$$\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int f(y)\, e^{-2\pi i \frac{y}{\lambda}\cdot\omega}\, \lambda^{-d} dy$$

قاعده تغییر متغیر در انتگرال:

$$T : \mathbb{R}^d \xrightarrow[\text{یک به یک}]{\text{مشتق پذیر}} \mathbb{R}^d$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(T(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \left|\det DT^{-1}(y)\right|\, dy$$

اگر نگاشت T خطی باشد یعنی از یک ماتریس بیاید $y = Tx$ آنگاه $\det DT^{-1} = \det T^{-1}$

(۴) اگر $f\in S(\mathbb{R}^d)$ آنگاه $\quad \mathcal{F}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)\right) = (2\pi i\omega)^{\alpha}\,\hat{f}(\omega)$

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

بنابر رابطه جزء به جزء برای انتگرال مؤلفه x_1 .

$$= (-1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{\alpha_2+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} f(x)\, \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(e^{-2\pi i x\cdot\omega}\right) dx$$

$\lim_{|x|\to\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} f(x) = 0$

$\forall \beta\le\alpha$

$$= (2\pi i\omega_1)^{\alpha_1}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{\alpha_2+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} f(x)\cdot e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

به طور مشابه رابطه جزء به جزء برای مؤلفه‌های دیگر به طور جداگانه محاسبه می‌شود

$$= (2\pi i\omega_1)^{\alpha_1}(2\pi i\omega_2)^{\alpha_2}\cdots(2\pi i\omega_d)^{\alpha_d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

۵) اگر $f \in S(\mathbb{R}^d)$ آنگاه

$$\mathcal{F}\left((-2\pi i x)^\alpha f(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^\alpha \hat{f}(\omega)$$

۶) اگر $R: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ یک دوران باشد، آنگاه

$$\mathcal{F}(f(Rx)) = \hat{f}(R\omega)$$

(ماتریس R را دوران گوییم هرگاه $R^t = R^{-1}$, $\det R = 1$)

$$\mathcal{F}(f(Rx)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(Rx)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2\pi i R^{-1} y\cdot\omega} \underbrace{\left|\det R^{-1}\right|}_{=1} dy = \hat{f}(R\omega)$$

$$R^t y \cdot \omega = y \cdot R\omega$$

۷) تبدیل فوریه فضای شوارتز را به فضای شوارتز تصویر می‌کند.

$$\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^d) \longrightarrow S(\mathbb{R}^d)$$

(۸) تابع f را شعاعی گوییم هرگاه $f(x)=\varphi(|x|)$. آنگاه تبدیل فوریه هر تابع شعاعی یک تابع شعاعی است.

در واقع تابع f شعاعی است $\Longleftrightarrow$ به ازای هر دوران R، $f(x)=f(Rx)$.

در نتیجه بنابر خاصیت (۶)

$$\hat{f}(R\omega) = \mathcal{F}(f(Rx)) = \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(\omega)$$

(۹)
$$\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2}) = e^{-\pi|\omega|^2}$$

$$\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_d^2)}\, e^{-2\pi i(x_1\omega_1+\cdots+x_d\omega_d)}\, dx_1\cdots dx_d$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} e^{-2\pi i x_1\omega_1}\, dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d\omega_d}\right) = e^{-\pi\omega_1^2} \times\cdots\times e^{-\pi\omega_d^2}$$

(۱۰)
$$\forall f,g \in S(\mathbb{R}^d): \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

(۱۱) قضیه: اگر $f \in S(\mathbb{R}^d)$ آنگاه

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega$$

اثبات: شبیه حالت یک بعدی کافی است رابطه بالا را برای نقطه $x=0$ ثابت کنیم. یعنی رابطه

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\, d\omega$$

قرار دهید $K_\delta(x) = \delta^{-d/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$ در این صورت $\hat{G}_\delta = K_\delta$ که $G_\delta(\omega) = e^{-\pi\delta|\omega|^2}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\, d\omega = \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) G_\delta(y)\, dy$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \underbrace{\hat{G}_\delta(x)}_{K_\delta(x)} dx = \lim_{\delta\to 0} (f * K_\delta)(0)$$

بنابراین کافی است نشان دهیم K_δ هسته خوب است و تساوی زیر را داریم:

$$f(0) = \lim_{\delta\to 0} (f * K_\delta)(0)$$

(i) $$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\,dx = \left[\delta^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi/\delta\, x_1^2}\,dx_1\right]^d = 1$$

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x) = 1$$

(iii) $$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\,dx \le \int_{\eta/\sqrt{d}\le |x_i|} |K_\delta(x)|\,dx = \left[\delta^{-1/2}\int_{|x_1|>\eta/\sqrt{d}} e^{-\pi/\delta\, x_1^2}\,dx_1\right]^d \xrightarrow{\text{وقتی } \delta\to 0} 0$$

(۱۲) $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^d) \longrightarrow S(\mathbb{R}^d)$ یک به یک و پوشا است.

(۱۳) $$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx$$

از رابطه (۱۰) و رابطه $\overline{\hat{f}} = \check{\bar{f}}$ نتیجه می‌شود.

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) \qquad (۱۴)$$

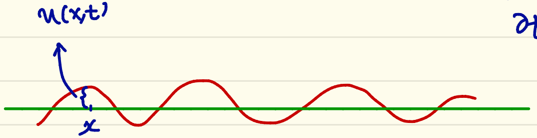
آنالیز فوریه

جلسه بیست ۹۶/۹/۱۱

کاربرد تبدیل فوریه :

معادله موج : موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



$u(x,t)$: مکان نقطه x در زمان t

$c =$ سرعت موج

موج در فضای d-بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} \right)$$

$$u(x,t) = u(x_1, \dots, x_d, t)$$

شرایط اولیه معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\hat{u}(\omega,t) := \mathcal{F}(u(\cdot,t)) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) = (2\pi i\,\omega_k)^2\ \hat{u}(\omega,t)$$

$$\mathcal{F}(\Delta u) = -4\pi^2 |\omega|^2\ \hat{u}(\omega,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \implies \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -4\pi^2 c^2 |\omega|^2\ \hat{u}$$

$$\implies \hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(2\pi c|\omega|t) + B(\omega)\sin(2\pi c|\omega|t)$$

شرایط اولیه $\implies \begin{cases} \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \\ \partial_t \hat{u}(\omega,0) = \hat{g}(\omega) \end{cases} \implies \begin{cases} A(\omega) = \hat{f}(\omega) \\ B(\omega) = \dfrac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|} \end{cases}$

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\cos(2\pi c|\omega|t)+\frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|}\sin(2\pi c|\omega|t)$$

کاندید جواب:

$$(1)\quad u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{f}(\omega)\cos(2\pi c|\omega|t)+\frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|}\sin(2\pi c|\omega|t)\right]e^{2\pi i x\cdot\omega}\,d\omega$$

قضیه: اگر $f,g\in S(\mathbb{R}^d)$ آنگاه $u(x,t)$ با ضابطه فوق یک تابع هموار است که در معادله موج صدق می‌کند.

اثبات_ با استفاده از جابجایی مشتق و انتگرال سرراست است.

$$u(x,0)=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\omega)\cos(0)\,e^{2\pi i x\cdot\omega}\,dx=f(x)$$

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)=u(x,0)\quad\Longleftarrow$$ قضیه تسلطی

یکتایی جواب :

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2 + c^2 \underbrace{|\nabla u|^2}_{|\partial_{x_1} u|^2 + \cdots + |\partial_{x_d} u|^2} \, dx$$

گزاره : اگر u جواب معادله موج باشد به طوریکه تابع انرژی برای همه زمان‌ها تعریف شده است، آنگاه

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = E(0)$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}^d} 2\, \partial_t u \cdot \partial_t^2 u + 2c^2 \partial_{x_1} u \cdot \partial^2_{t x_1} u + \cdots + 2c^2 \partial_{x_d} u \cdot \partial^2_{t x_d} u \, dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{Q_R} \cdots \, dx = \lim_{R \to \infty} \Big[\int_{Q_R} 2 \partial_t u \, \partial_t^2 u - 2c^2 \partial^2_{x_1} u \cdot \partial_t u - \cdots - 2c^2 \partial^2_{x_d} u \cdot \partial_t u$$

$$+ 2c^2 \partial_t u \, \partial_{x_1} u \Big|_{x_1=-R}^{R} + \cdots + 2c^2 \partial_t u \, \partial_{x_d} u \Big|_{x_d=-R}^{R} \Big]$$

چون $E(t)$ مقدار کران‌دار است در نتیجه $\lim_{|x|\to\infty} |\partial_t u| + |\nabla u| = 0$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}^d} 2\partial_t u \, [\underbrace{\cancel{\partial_t^2 u - c^2 \Delta u}}_{0}] \, dx = 0$$

نتیجه: اگر u و $\tilde{u}$ دو جواب معادله موج با شرایط اولیه یکسان باشند، که تابع انرژی هر دو تعریف شده باشد آنگاه $u = \tilde{u}$.

اثبات - $w = u - \tilde{u}$ جواب معادله موج با شرایط اولیه صفر $\Leftarrow$ $E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t w|^2 + |\nabla w|^2 \, dx$

$= E(0) = 0 \Rightarrow |\partial_t w| = |\nabla w| = 0 \Rightarrow$ w تابع ثابت است

$w(x,0) = u(x,0) - \tilde{u}(x,0) = 0$ $\Leftarrow$ $w \equiv 0$ تابع ثابت صفر. $\Leftarrow$ $u = \tilde{u}$

گزاره: تابع انرژی جواب به‌دست آمده از فرمول (۱) یک مقدار کران دار است.

از فرمول (۱) نتیجه می‌شود که $u(x,t)$ تبدیل فوریه دارد و

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cos(2\pi c|\omega|t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|}\sin(2\pi c|\omega|t)$$

$$\mathcal{F}(\partial_t u) = \partial_t \hat{u}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{\partial_t u}\right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} \left[-2\pi c|\omega| \hat{f}(\omega)\sin(\dots) + \hat{g}(\omega)\cos(\dots)\right]^2 d\omega$$

$$(1)\quad u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{f}(\omega)\cos(2\pi c|\omega|t)+\frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|}\sin(2\pi c|\omega|t)\right]e^{2\pi i x\cdot\omega}\,d\omega$$

<u>در بعد یک</u> : (حالت $c=1$)

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\left[\hat{f}(\omega)\cos(2\pi\omega t)+\hat{g}(\omega)\frac{\sin(2\pi\omega t)}{2\pi\omega}\right]e^{2\pi i x\omega}\,d\omega$$

$$\cos(2\pi\omega t)=\frac{e^{2\pi\omega t i}+e^{-2\pi\omega t i}}{2}$$

$$\sin(2\pi\omega t)=\frac{e^{2\pi\omega t i}-e^{-2\pi\omega t i}}{2i}$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega)+\frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi i\omega}\right]e^{2\pi\omega t i}+\frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega)-\frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi i\omega}\right]e^{-2\pi\omega t i}\right)e^{2\pi i x\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i\omega(x+t)}\, d\omega + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i\omega(x-t)}\, d\omega$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi i\omega}\, e^{2\pi i\omega(x+t)}\, d\omega - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi i\omega}\, e^{2\pi i\omega(x-t)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x+t} g(y)\, dy - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x-t} g(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t) \right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$$

فرمول دالامبر:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$$

رابطه دالامبر در ابعاد بالاتر:

لم:
$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i x\cdot\omega}\,d\sigma(x) = \frac{\sin(2\pi|\omega|)}{2\pi|\omega|}$$

S^2: کره به شعاع یک در $\mathbb{R}^3$

به طور شهودی لم بالا بیان می‌دارد که
$$\mathcal{F}\left(\chi_{(S^2)}\right) = \frac{\sin(2\pi|\omega|)}{2\pi|\omega|}$$

$$\chi_{(S^2)}(x) = \begin{cases} 1 & x\in S^2 \\ 0 & x\notin S^2 \end{cases}$$

درنتیجه تابع زیر یک کاندید خوب برای عکس فوریه $\hat{g}(\omega)\,\dfrac{\sin(2\pi|\omega|t)}{2\pi|\omega|}$ است:

$$g * \chi_{(\partial B_t)}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\,\chi_{(\partial B_t)}(y)\,dy$$

کره به شعاع t

$$= \int_{\partial B_t} g(x-y)\,d\sigma(y)$$

تعریف: در حالت $d=3$.

$$M_t(g)(x) := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} g(x-ty)\,d\sigma(y)$$

ادعا:

$$\mathcal{F}\big(M_t(g)\big) = \hat{g}(\omega)\,\frac{\sin(2\pi|\omega|t)}{2\pi|\omega|t}$$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و یک ۹۶/۹/۱۳

لم: $\forall \omega \in \mathbb{R}^3$: $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, d\sigma(x) = \frac{\sin(2\pi|\omega|)}{2\pi|\omega|}$

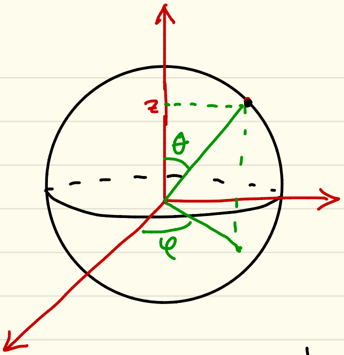
اثبات: دقت کنید انتگرال سمت چپ یک تابع شعاعی برحسب ω است. زیرا اگر R یک دوران باشد، آنگاه $(R^t = R^{-1})$ $\det R = 1$

$$\int_{S^2} e^{-2\pi i x\cdot R\omega}\, d\sigma(x) = \int_{S^2} e^{-2\pi i R^t x\cdot\omega}\, d\sigma(x) = \int_{S^2} e^{-2\pi i R^{-1}x\cdot\omega}\, d\sigma(x)$$

$$= \int_{S^2} e^{-2\pi i y\cdot\omega}\, \underbrace{|\det R|}_{=1}\, d\sigma(y)$$

پس کافی است لم را برای $\omega = (0,0,r)$ ثابت کنیم: $x = (x,y,z)$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i r z}\, d\sigma \overset{?}{=} \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi r}$$



$$(\varphi,\theta) \longmapsto (\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi \ ,\ 0 \le \theta \le \pi$$

$$d\sigma = \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i r z}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-2\pi i r\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{-1} e^{-2\pi i r u}(-du) \qquad u = \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{e^{-2\pi i r u}}{-2\pi i r}\right|_{u=-1}^{1} = \frac{e^{-2\pi i r} - e^{2\pi i r}}{-4\pi i r} = \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi r}$$

$$M_t(g)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g(x-ty)\, d\sigma(y)$$

<u>ادعا:</u>

$$\mathcal{F}\big(M_t(g)\big) = \hat{g}(\omega)\, \frac{\sin(2\pi|\omega|t)}{2\pi|\omega|t}$$

$$\mathcal{F}\big(M_t(g)\big)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} M_t(g)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g(x-ty)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, d\sigma(y)\, dx$$

$$= \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi}\, g(x-ty)\, e^{-2\pi i (x-ty)\cdot\omega}\, dx\; e^{-2\pi i t y\cdot\omega}\, d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \hat{g}(\omega)\, e^{-2\pi i\, y\cdot(t\omega)}\, d\sigma(y) = \hat{g}(\omega) \cdot \frac{\sin(2\pi|\omega|t)}{2\pi|\omega|t}$$

قضیه: جواب معادله موج در بعد $d=3$ عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t M_t(f)(x)\Big) + t M_t(g)(x)$$

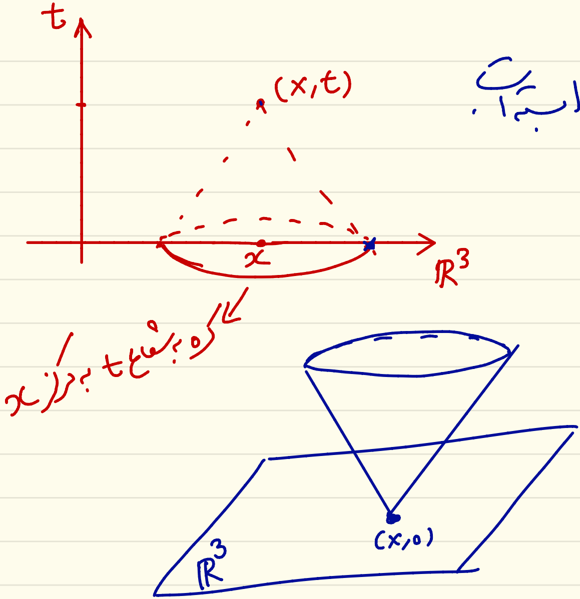
اثبات: از رابطه زیر که در جلسه قبل به دست آمده به راحتی نتیجه می‌شود:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\hat{f}(\omega)\cos(2\pi|\omega|t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2\pi c|\omega|}\sin(2\pi|\omega|t)\right] e^{2\pi i x\cdot\omega}\, d\omega$$

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} f(x-ty)\, d\sigma(y)\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x-ty)\, d\sigma(y)$$

مقایسه با جواب دالامبر در بعد $d=1$:

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$$



مقدار $u(x,t)$ به شرایط اولیه روی کره به شعاع t به مرکز x وابسته است.

برعکس مقدار شرایط اولیه در نقطه x روی همه نقاط

که روی مخروط $\{(y,t) : |y-x| = t\}$

اثرگذار است.

نکته: لمی که ابتدای جلسه اثبات کردیم در بعد ۲ دیگر درست نیست. لذا فرمولی که برای جواب معادله موج در بعد سه بدست آمد معتبر نیست.

جواب معادله موج در بعد $d=2$.

$$\begin{cases} u_{t} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$X = (x_1, x_2) \quad , \quad \tilde{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\tilde{f}(\tilde{X}) := f(x_1, x_2) \quad , \quad \tilde{g}(\tilde{X}) = g(x_1, x_2)$$

$$\tilde{u}(\tilde{X}, t) := u(x_1, x_2, t)$$

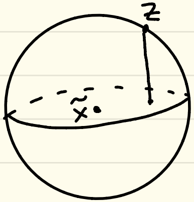
$$\partial_t \tilde{u} = \partial_t u = \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = \partial_{x_1}^2 \tilde{u} + \partial_{x_2}^2 \tilde{u} = \partial_{x_1}^2 \tilde{u} + \partial_{x_2}^2 \tilde{u} + \partial_{x_3}^2 \tilde{u}$$

$$= \Delta \tilde{u}$$

$$\tilde{u}(\tilde{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t M_t(\tilde{f})(\tilde{x})\right) + t M_t(\tilde{g})(\tilde{x})$$

$$u(x,t) = \tilde{u}(x_1,x_2,0,t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} \tilde{f}(\tilde{x}-t\tilde{y})\,d\sigma(\tilde{y})\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} \tilde{g}(\tilde{x}-t\tilde{y})\,d\sigma(\tilde{y})$$



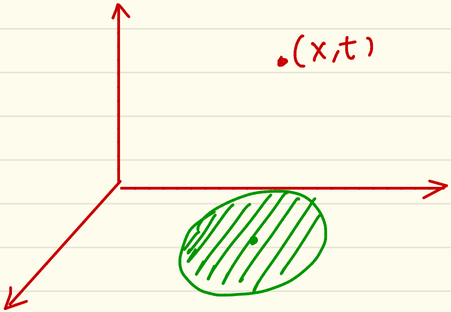
$$t^2\int_{S^2} \tilde{g}(\tilde{x}-t\tilde{y})\,d\sigma(\tilde{y}) = \int_{\partial B_t(\tilde{x})} \tilde{g}(\tilde{z})\,d\sigma(\tilde{z}) = \int_{\partial B_t(\tilde{x})} g(z_1,z_2)\,d\sigma(\tilde{z})$$

نقشه مناسب برای انتگرال فوق : $z=(z_1,z_2) \longmapsto \left(z_1,z_2,(t^2-|z|^2)^{1/2}\right)$

$$d\sigma(\tilde{z}) = \frac{1}{t}\,(t^2-|z|^2)^{1/2}\,dz$$

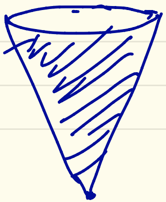
$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t^2} \int_{|z-x|\le t} f(z) \quad (t^2-|z|^2)^{1/2}\, dz \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|z-x|\le t} g(z) \quad (t^2-|z|^2)^{1/2}\, dz$$



مقدار $u(x,t)$ به تمام مقادیر شرط اولیه که در داخل کره
به مرکز x و شعاع t قرار دارند وابسته است.

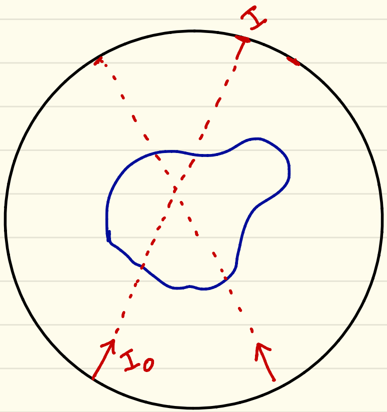
بر عکس مقدار اولیه در نقطه x در زمان t در تمام نقاط $B_t(x)$
اثرگذار است.



آنالیز فوریه

جلسه بیست و دو ۹۶/۹/۱۸

کاربردهای تبدیل فوریه : تبدیل رادون



در راستای مختلف اشعه X به جسم تابیده می‌شود و برحسب میزان اتلاف انرژی طول مسیری که در جسم طی کرده است را به دست می‌آورید.

سؤال: برحسب اطلاعات میزان طول خط‌های مختلف چگونه شکل جسم را بازیابی کنیم؟

اگر ثابت ممکن نباشد، در واقع آنچه باعث اتلاف انرژی می‌شود متناسب با $\int_L \rho$ است که ρ ضریب برحسب اتلاف انرژی ثابت است و L خطی است که اشعه در راستای آن تابیده می‌شود.

در نتیجه اطلاعات داده شده عبارت‌اند از $\int_L \rho$ برای همه خطوط صفحه که آن را تبدیل رادون تابع ρ می‌نامیم:

$$\rho : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{تکیه‌گاه فشرده}} \mathbb{R}$$

$$X(\rho) : \{\text{همه خطوط}\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad X(\rho)(L) = \int_L \rho$$

<u>سؤال:</u> ① با دانستن $X(\rho)$ آیا می‌توان ρ را پیدا کرد؟

② آیا تبدیل رادون یک‌به‌یک است؟ یعنی اگر $X(\rho_1) = X(\rho_2)$ باشد، آیا $\rho_1 = \rho_2$ ؟

حل مسأله در بعد ۲: پروژه با نمره اضافی ص ۲۱۷ تمرین‌های ۷ و ۸

<u>مسأله در بعد ۳:</u> در بعد ۳ تبدیل رادون به این صورت تعریف می‌شود که

$$\rho \longmapsto X(\rho)$$

$$X(\rho) : \{\text{صفحه‌ها در } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\rho)(P) = \int_P \rho$$

<u>نکته:</u> فضای همه خطوط در $\mathbb{R}^3$ یک فضای دو بعدی است و به نظر می‌آید که برای پیدا کردن تابع $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ از تابع $X(\rho)$ که روی فضای دو بعدی تعریف شده است اطلاعات کافی نباشد.

فضای همه صفحه‌ها در R^3 یک خمینه سه‌بعدی است. برای نمایش هر صفحه، $\omega \in S^2$ را بردار عمود یکه آن می‌گیریم و نقطه $t\omega$ (برای یک مقدار $0 \leq t$) از صفحه انتخاب می‌کنیم. معادله صفحه عبارت است از

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$(x - t\omega) \cdot \omega = 0 \Rightarrow x \cdot \omega = t$$

دقت کنید که برای دو مقدار (t, ω) و $(-t, -\omega)$ یک صفحه مشخص می‌شود و به همین منظور فقط $t \geq 0$ را انتخاب کنیم. این صفحه را با $P_{t,\omega}$ نشان می‌دهیم.

تبدیل رادون:

$$R(\rho)(t, \omega) = \int_{P_{t,\omega}} \rho$$

<u>قضیه:</u> اگر $\rho \in S(\mathbb{R}^3)$ آنگاه $S(\mathbb{R}) \ni R(\rho)(\cdot,\omega)$ و

$$\widehat{R(\rho)}(s,\omega) = \hat{\rho}(s\omega)$$

تبدیل فوریه تبدیل رادون نسبت به متغیر t

تبدیل فوریه ρ

در واقع تساوی زیر برقرار است

$$\widehat{R(\rho)}(s,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\rho)(t,\omega)\, e^{-2\pi i t s}\, ds \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(s\omega)}\, dx$$

$$R(\rho)(t,\omega) = \int_{P_{t,\omega}} \rho = \int_{x\cdot\omega = t} \rho(x)$$

اگر e_1 و e_2 دو بردار یکه متعامد درون صفحه $P_{t,\omega}$ در نظر بگیرید و $t\omega$ هم یک نقطه دلخواه از این صفحه. آنگاه نگاشت زیر

یک نقشه (پارامتریش) برای این صفحه است

$$(t_1, t_2) \longmapsto t_1 e_1 + t_2 e_2 + t\omega$$

$$\varphi(t) = \int_{x\cdot\omega = t} \rho(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(t_1 e_1 + t_2 e_2 + t\omega)\, dt_1\, dt_2$$

$$\varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\rho(t_1 e_1 + t_2 e_2 + t\omega)\cdot\omega \; dt_1\, dt_2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\rho)(t,\omega)\, e^{-2\pi i s t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{P_{t,\omega}} \rho \right] e^{-2\pi i s t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\underbrace{t_1e_1+t_2e_2+t\omega}_{x \;\Rightarrow\; x\cdot\omega = t})\, e^{-2\pi i s t}\, dt_1\, dt_2\, dt$$

بردارهای e_1 و e_2 بر ω عمود هستند و درنتیجه $\langle e_1, e_2, \omega\rangle$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^3$ است درنتیجه

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\, e^{-2\pi i s(x\cdot\omega)}\, dx = \hat{\rho}(s\omega)$$

نتیجه (یکتایی) اگر $\rho,\mu \in S(\mathbb{R}^3)$ و $R(\rho)=R(\mu)$ آنگاه $\rho=\mu$.

فرمول محاسبه ρ:

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\rho}(\omega)\, e^{2\pi i x\cdot\omega}\, d\omega$$

$$= \int_{S^2}\int_0^\infty \hat{\rho}(s\omega)\, e^{2\pi i x\cdot(s\omega)}\, ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= \int_{S^2}\int_0^\infty \widehat{R(\rho)}(s,\omega)\, e^{2\pi i s(x\cdot\omega)}\, ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= \int_{S^2}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} R(\rho)(t,\omega)\, e^{-2\pi i t s}\, e^{2\pi i s(x\cdot\omega)}\, dt\, ds\, d\sigma(\omega)$$

دوگان تبدیلِ رادون : فرض کنید F روی $\mathbb{R}\times S^2$ تعریف شده باشد

$$R^*(F)(x) := \int_{S^2} F(x\cdot\omega, \omega)\, d\sigma(\omega)$$

$$R : S(\mathbb{R}^3) \longrightarrow S(\mathbb{R}\times S^2)$$

$$R^* : S(\mathbb{R}\times S^2) \longrightarrow S(\mathbb{R}^3)$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{S^2} Rf(t,\omega)\overline{g(t,\omega)}\,dt\,d\omega = \langle Rf, g\rangle = \langle f, R^*g\rangle \qquad f\in S(\mathbb{R}^3),\ g\in S(\mathbb{R}\times S^2)$$

<u>قضیه ۳</u> اگر $f\in S(\mathbb{R}^3)$ آنگاه $\Delta\left(R^*R(f)\right)=-8\pi^2 f$

اثبات ـ کافی است نشان دهیم

$$\mathcal{F}\left(R^*R(f)\right)=\frac{2\hat{f}(\omega)}{|\omega|^2}$$

$$\mathcal{F}\left(R^*R(f)\right)(\omega)=\int_{\mathbb{R}^3} R^*R(f)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2} R(f)(x\cdot\xi,\xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\,d\xi\,dx$$

بنابر قضیه ۱ $\Rightarrow$ $$R(f)(t,\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s\xi)\,e^{2\pi i t s}\,ds$$

$$\mathcal{F}(R^*R(f)) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\xi)\, e^{2\pi i (x\cdot\xi)s}\, e^{-2\pi i\, x\cdot\omega}\, ds\, d\xi\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} 2\int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(y)\, e^{2\pi i\, x\cdot y} \quad \frac{e^{-2\pi i\, x\cdot\omega}}{|y|^2}\, dy\, dx$$

$$= 2\, \frac{\hat{f}(\omega)}{|\omega|^2}$$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و سه ۹۶/۹/۲۰

Fast Fourier Transform (FFT)

تناوبی $f : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$f(x) \sim \sum c_n e^{2\pi i n x}$$

$$c_n = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} f\left(\frac{K}{N}\right) e^{-2\pi i n \frac{K}{N}}$$

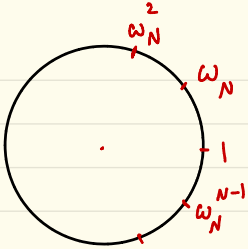
سؤال: پیچیدگی محاسبه ضرایب سری فوریه وقتی مقادیر $f(0)$ ، $f(\frac{1}{N})$ ، … ، $f(\frac{N-1}{N})$ مشخص هستند، چقدر است؟

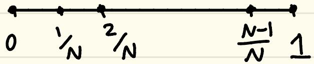
$$\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

برای محاسبه c_n باید مقادیر 1 ، ω_N^{-n} ، ω_N^{-2n} ، … ، $\omega_N^{-(N-1)n}$ را حساب کنیم.

$$f\left(\frac{K}{N}\right) \sim \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i n \frac{K}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \omega_N^{Kn}$$

فرمول وارون سری فوریه





اگر تابع $f: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ را داشته باشیم می‌توان سری فوریه آن را با ضابطه زیر تعریف کرد:

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n \, \omega_N^{kn}$$

که ضرایب فوریه c_n با فرمول زیر حساب می‌شوند:

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \, \omega_N^{-kn}$$

سؤال: آیا سری فوریه با تابع f برابر است؟

مجموعه همه توابع $f: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است و بعد فضا N است.

مجموعه توابع $\{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$ یک پایه برای این فضا هستند که

$$g_i(x) = \begin{cases} 1 & x = i \\ 0 & x \neq i \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) g_i(x)$$

این فضای برداری، فضای ضرب داخلی است با ضرب:

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \overline{g(k)} \quad , \quad \| f \| = \sqrt{(f,f)} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 \right]^{1/2}$$

تعریف:

$$e_n : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$e_n(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega_N^{kn}$$

لم ۱ : مجموعه $\{e_0, \dots, e_{N-1}\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای برداری همه توابع روی $\mathbb{Z}_N$ است .

اثبات :

$$(e_i, e_j) = \sum_{k=0}^{N-1} e_i(k)\overline{e_j(k)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{ik}\,\overline{\omega_N^{jk}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{(i-j)k}$$

$$\overline{\omega_N} = \omega_N^{-1}$$

اگر $i=j$ واضح است که حاصل عبارت بالا برابر یک است. اگر $i \neq j$ عبارت بالا برابر است با :

$$\frac{1}{N} \times \frac{1-\omega_N^{(i-j)N}}{1-\omega_N^{i-j}} = 0$$

نتیجه: به‌ازای هر تابع $f: \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ داریم:

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} (f, e_k)\, e_k$$

$$(f, e_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\overline{e_k(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, \omega_N^{-kn}$$

نتیجه: (رابطه پارسوال)

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |(f, e_k)|^2$$

الگوریتم محاسبه سری فوریه: $F: [0,1] \to \mathbb{C}$ با گسسته‌سازی مثل این است که سری فوریه تابع

$f: \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ را حساب کنیم که $f(k) := F\left(\frac{k}{N}\right)$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, \omega_N^{-kn} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

برای محاسبه باید ω_N^{-kn} را برای $0 \le k \le N-1$ و $0 \le n \le N-1$ حساب کنیم.

چون $\omega_N^p = \omega_N^q$ هرگاه $N \mid p-q$ باید تنها مقادیر ω_N^0، ω_N^1، ...، ω_N^{N-1} را حساب کنیم که با N ضرب به دست می‌آید.

در نتیجه برای محاسبه c_n باید ابتدا kn را به ازای هر $0 \le k \le N-1$ حساب کنیم دفعه ضرب $f(k)\,\omega_N^{-kn}$ محاسبه می‌شود.

در نتیجه برای محاسبه سری $c_n = \frac{1}{N}\sum f(k)\,\omega_N^{-kn}$ با $2N$ محاسبه انجام می‌شود.

لذا هم ضرایب c_0، ...، c_{N-1} با $2N^2+N$ قابل محاسبه است. بنابراین پیچیدگی محاسبه این الگوریتم $O(N^2)$ است.

الگوریتم FFT این پیچیدگی را به $O(N\log N)$ کاهش می‌دهد.

الگوریتم FFT :

برای $N=2^n$ نشان می‌دهیم با حداکثر $4Nn$ ضرایب فوریه را محاسبه کنید.

$\#(M)$ تعداد عملیات جبری لازم برای محاسبه ضرایب فوریه روی $\mathbb{Z}_M$

لم: $\#(2M) \leq 2\#(M) + 8M$

نتیجه: $\alpha_n = \#(2^n) \Rightarrow \alpha_n \leq 2^{n+2} n$

از لم بالا می‌دانیم که: $\alpha_{n+1} \leq 2\alpha_n + 2^{n+3}$

بنابراستقراء $\alpha_{n+1} \leq 2 \times 2^{n+2} n + 2^{n+3} = 2^{n+3}(n+1)$

$\omega_{2M}^{2} = \omega_M \quad , \quad f : \mathbb{Z}_{2M} \longrightarrow \mathbb{C}$: اثبات لم

$$f_0(k) = f(2k) \quad , \quad f_1(k) = f(2k+1)$$

$$f_0 , f_1 : \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$C_0^M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f_0(k)\, \omega_M^{kn}$$

$$C_1^M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f_1(k)\, \omega_M^{kn}$$

$$C^{2M}(n) = \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} f(k)\, \omega_{2M}^{kn} = \frac{1}{2M} \left[\sum_{k=0}^{M-1} f(2k)\, \omega_{2M}^{2kn} + \sum_{k=0}^{M-1} f(2k+1)\, \omega_{2M}^{(2k+1)n} \right]$$

$$= \frac{1}{2M} \left[\sum_{k=0}^{M-1} f_0(k)\, \omega_M^{kn} + \omega_{2M}^{n} \sum_{k=0}^{M-1} f_1(k)\, \omega_M^{kn} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[C_0^M(n) + \omega_{2M}^{n}\, C_1^M(n) \right]$$

محاسبه $C^{2M}(n)$ از روی مقادیر $C_0^M(n)$ ، $C_1^M(n)$ و ω_{2M}^n به سه عمل جبری احتیاج است.

$$\#(2M) \leq 3 \times 2M + 2\,\#(M) + \underbrace{2M}$$

تعداد عملیات لازم برای محاسبه $\omega_{2M}^0 ، \omega_{2M}^1 ، \ldots ، \omega_{2M}^{2M-1}$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و چهار ۹۶/۹/۲۴

تبدیل فوریه متناهی

G یک گروه آبلی متناهی

V : مجموعه همه توابع $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ که یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است.

$$\dim V = |G|$$

تعریف ضرب داخلی روی V

$$(f, g) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a) \overline{g(a)}$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} |f(a)|^2$$

تعریف: هر تابع $e : G \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ را یک مشخصه G گوییم هرگاه یک تابع ضربی باشد یعنی برای هر $a \in G$ داشته باشیم $|e(a)| = 1$ و $e(a.b) = e(a)\,e(b)$ برای هر $a, b \in G$.

عمل گروه   ضرب در $\mathbb{C}$

مجموعه همه مشخصه‌های G را با $\hat{G}$ نشان می‌دهیم.

ادعا: مجموعه همه مشخصه‌های G یک مجموعه متعامد یکه است.

$$\|e\|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} |e(a)|^2 = 1$$

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} e_1(a)\, \overline{e_2(a)} = 0 \quad ? \qquad \forall e_1 \neq e_2$$

تعریف - تابع شخصی $e:G\to S^1$ که $e(a)=1$ بازای هر $a\in G$ آن را شخصی بدیهی گوییم.

گزاره: مجموعه $\hat{G}$ با ضرب زیر یک گروه آبلی است:

$$(f\cdot g)(a) = f(a)g(a)$$

ضرب $\hat{G}$ ضرب در $\mathbb{C}$

لم: e یک شخصی غیربدیهی G است، آنگاه $\sum_{a\in G} e(a) = 0$

اثبات - چون e غیربدیهی است پس $e(b)\neq 1$ برای لااقل یک $b\in G$ و داریم

$$e(b)\sum_{a\in G} e(a) = \sum_{a\in G} e(b)e(a) = \sum_{a\in G} e(ba) = \sum_{c\in G} e(c)$$

$$\Longrightarrow \sum_{a\in G} e(a) = 0$$

قضیه: مجموع $\hat{G}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

$$e_1 \neq e_2 \Rightarrow \quad (e_1, e_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} e_1(a) \overline{e_2(a)}$$

چون $|e_2(a)| = 1$ پس $\overline{e_2(a)} = (e_2(a))^{-1}$

$$\Rightarrow \quad (e_1, e_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \frac{e_1(a)}{e_2(a)} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} e_3(a)$$

بنابر گزاره صفحه قبل $e_3 \in \hat{G}$ و چون $e_1 \neq e_2$، e_3 یک عضو غیر بدیهی است، در نتیجه بنابر لم قبل

مجموع فوق برابر صفر است.

قضیه : $\hat{G}$ یک پایه متعامد یکه برای V است.

نتیجه : $|G| = |\hat{G}|$

ایده اثبات قضیه : یک پایه برای V پیدا می‌کنیم که اعضای آن متعلق به $\hat{G}$ باشند.

$\forall a \in G$ $\qquad T_a : V \longrightarrow V$

$$T_a(f)(x) = f(a.x) \qquad \forall x \in G$$

T_a تبدیل خطی است روی V و داریم $\qquad T_a T_b = T_b T_a$

درضمن T_a عملگر یکانی است زیرا

$$(T_a^*(f), g) = (f, T_a(g))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} f(x)\overline{g(ax)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} f(a^{-1}x)\overline{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad T_a^*(f)(x) = f(a^{-1}x) = T_{a^{-1}}(f)(x)$$

$$\Rightarrow \quad T_a^* = T_{a^{-1}} = (T_a)^{-1}$$

درنتیجه گروه تبدیلهای خطی $\{T_a\}_{a\in G}$ دو به دو باهم جابجا می‌شوند و همگی یکانی هستند درنتیجه همزمان قطری می‌شوند. اگر $\{f_a\}_{a\in G}$ پایه متعامد یکه‌ای باشد که این تبدیلات خطی همزمان در آن قطری می‌شوند نشان خواهیم که $f_a \in \hat{G}$.

$$T_a(f_b) = \lambda_{ab} f_b \quad \Rightarrow \quad \lambda_{ab} f_b(x) = T_a(f_b)(x) = f_b(ax)$$

$$f_b(xy) = \lambda_{yb} f_b(x) \quad \xRightarrow{y=1} \quad f_b(x) = \lambda_{1b} f_b(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1b} = 1$$

$$f_b(yx) = \lambda_{xb} f_b(y) \quad \xRightarrow{y=1} \quad f_b(x) = \lambda_{xb} f_b(1) \quad \Rightarrow \quad f_b(1) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_b(xy) = \lambda_{yb} f_b(x) = \frac{f_b(y)}{f_b(1)} f_b(x)$$

در نتیجه تابع $g_b(x) = \dfrac{f_b(x)}{f_b(1)}$ یک تابع ضربی است.

$$\Rightarrow \sum_{x\in G} |f_b(xy)|^2 = \sum_{x\in G} \frac{|f_b(y) f_b(x)|^2}{|f_b(1)|^2} = \frac{|f_b(y)|^2}{|f_b(1)|^2} \sum_{x\in G} |f_b(x)|^2$$

$$\Rightarrow \quad |f_b(y)| = |f_b(1)| \quad \Rightarrow \quad |g_b(x)| = 1$$

$$\Rightarrow \quad g_b \in \hat{G}$$

از این رابطه با توجه به یکه بودن f_b می‌توان به طور مستقیم دید

$f_b \in \hat{G}$

سری فوریه متناهی :

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = \sum_{e \in \hat{G}} (f, e)\, e(x)$$

که ضرایب فوریه به صورت زیر محاسبه می‌شوند ،

$$(f, e) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\, \overline{e(x)}$$

رابطه پارسوال :

$$\|f\|^2 = \sum_{e \in \hat{G}} |(f, e)|^2$$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و پنج ۹۶/۹/۲۷

قضیه دیریکله: تعداد اعداد اول به صورت $Kq+l$ که $(q,l)=1$ نامتناهی است.

گزاره: تعداد اعداد اول نامتناهی است.

اثبات - اگر $\{p_1,\dots,p_n\}$ همه اعداد اول باشند، عدد $N=p_1p_2\cdots p_n+1$ عامل اولی دارد که جزء $\{p_1,\dots,p_n\}$ نیست.

یک صورت ساده قضیه دیریکله: اعداد اول به صورت $4K+3$ نامتناهی است.

اگر همه اعداد اول $4K+3$ متناهی و مجموعه $\{p_1,\dots,p_n\}$ باشند، آنگاه در تجزیه عدد $N=4p_1p_2\cdots p_n-1$ عوامل اول غیر از اعداد $\{p_1,\dots,p_n\}$ است. از طرفی همه عوامل اول N نمی‌توانند به صورت $4K+1$ باشند

زیرا در این صورت $N \overset{4}{\equiv} 1$.

تعداد اعداد اول به صورت $4k+1$ نامتناهی است. $\longleftarrow$ ایده‌ی قبل کار نمی‌کند.

ایده‌ی کلی اثبات قضیه‌ی دیریکله: مجموع $\displaystyle\sum_{\substack{p \text{ عدد اول به} \\ \text{صورت} \\ kq+l}} \frac{1}{p}$ واگرا است.

گزاره: $\displaystyle\sum_{\substack{p \text{ عدد اول} \\ \text{است}}} \frac{1}{p}$ واگرا است.

اثبات ــ به کمک تابع زتا.

تعریف (تابع زتا)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

به ازای $s>1$ سری فوق همگرا (برای $s>1+\epsilon$ همگرای یکنواخت) و تابع ζ پیوسته است.

به علاوه داریم:

$$\prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p_i} \left(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \frac{1}{p_i^{3s}} + \cdots \right)$$

$$= 1 + \sum_i \frac{1}{p_i^s} + \sum \frac{1}{p_i^s p_j^s} + \cdots + \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}\right)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= \zeta(s)$$

تعریف: اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله اعداد حقیقی باشد حاصلضرب همه آنها را در حالتی که حد زیر وجود داشته باشد،

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} A_n$$

تعریف می‌کنیم.

گزاره: اگر $A_n = 1+a_n$ و $\sum |a_n|$ همگرا آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ همگرا است.

ثابت کافی است نشان دهیم $\sum_{n=1}^{\infty} \log A_n$ (با فرض اینکه $|a_n|<1$ برای هر n) همگرا است.

$$\log A_n = \log(1+a_n) = a_n + O(a_n^2) \leq 2|a_n|$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad |x|<1$$

نتیجه: اگر $\sum |a_n|$ همگرا و $a_n \neq 1$ برای هر n، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n}$ همگرا است.

نتیجه- $\prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ همگرا است برای $s>1$.

اثبات- مانند گزاره قبل باید $\sum_{p \text{ اول}} p^{-s}$ همگرا باشد و از طرفی

$$\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p^s} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$$

گزاره: $\prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (ضرب اویلر)

اثبات- $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \le \prod_{p \le N \text{ اول}} \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right)$$

M بزرگترین توانی که در تجزیه اعداد کوچکتر از N به دست می‌آید.

ابتدا $M \to \infty$

$$\le \prod_{p \le N} \left(1+\frac{1}{p^s}+\cdots\right) = \prod_{p \le N} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

اگر $N\to\infty$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq\prod_{p\ \text{اول}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

برعکس به وضوح داریم:

$$\prod_{p\leq N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

اکنون $M\to\infty$ و سپس $N\to\infty$.

قضیه: $\sum_{p\ \text{اول}}\frac{1}{p}$ واگراست.

اثبات.

$$\log\zeta(s)=-\sum_{p\ \text{اول}}\log(1-p^{-s})=-\sum_{p\ \text{اول}}\left(-p^{-s}+O(p^{-2s})\right)$$

به‌ازای $s>\frac{1}{2}$ داریم:

$$\sum_{p\ \text{اول}}\frac{1}{p^{2s}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}<\infty$$

بنابراین داریم:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

اکنون $s \to 1^+$ بنابر خواص تابع زتا می‌دانیم که $\zeta(s) \to \infty$ درنتیجه $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p^s} \to \infty$ وقتی $s \to 1^+$.

$$\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p} \geq \sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p^s} \Longrightarrow \sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p} = \infty$$

مثال کوچکی از ایده اثبات قضیه دیریکله : چرا تعداد اعداد اول بصورت $4k+1$ نامتناهی است ؟

تعریف - گروه ضربی $\mathbb{Z}^*(q)$ شامل همه اعدادی است که نسبت به q اولند و تحت ضرب یک گروه آبلی هستند

مثال - $\mathbb{Z}^*(4)$ یک گروه دوعضوی است . تابع مشخصه $\chi : \mathbb{Z}^*(4) \longrightarrow \{\pm 1\}$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود :

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & n \overset{4}{\equiv} 1 \\ -1 & n \overset{4}{\equiv} -1 \end{cases}$$

واضح است که $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$. تابع χ را به کل $\mathbb{Z}$ توسعه می‌دهیم بدین صورت که

اگر n عامل زوج داشته باشد ، $\chi(n) = 0$. مشابه فرمول اویلر داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

$$\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = 1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\cdots$$

$$\prod \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = \sum \frac{\chi(p_1^{k_1})\cdots\chi(p_r^{k_r})}{(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})^s} = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \ \text{اول}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

سمت چپ $= 1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots \Longrightarrow$ به ازای هر $s>0$ همگرا است.

$$\log L(s,\chi) = -\sum_{p \ \text{اول}} \log\left(1-\chi(p)p^{-s}\right) = \sum_{p \ \text{اول}} \left(\chi(p)p^{-s}+O(p^{-2s})\right)$$

$$= \sum \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$$

اکنون $s \to 1^+$ خواهیم داشت $\displaystyle\sum_{\text{اول}} \frac{\chi(p)}{p}$ همگرا است.

$$\sum \frac{\chi(p)}{p} = \sum_{p \overset{4}{\equiv} 1} \frac{1}{p} - \sum_{p \overset{4}{\equiv} -1} \frac{1}{p}$$

از طرفی جمع این دو سری برابر $\displaystyle\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ و واگرا است در نتیجه باید $\displaystyle\sum_{p \overset{4}{\equiv} 1} \frac{1}{p}$ واگرا باشد.

طرح اثبات قضیه دیریکله: χ را یک مشخصه روی $\mathbb{Z}^*(q)$ بگیرید و به $\mathbb{Z}$ گسترش دهید به این صورت

که اگر $(n,q)\neq 1$ قرار دهید $\chi(n)=0$.

تابع δ_l را روی $\mathbb{Z}^*(q)$ اینگونه تعریف کنید:

$$\delta_l(n)=\begin{cases}1 & n\overset{q}{\equiv} l\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

سری فوریه آن روی گروه آبلی $G=\mathbb{Z}^*(q)$ به صورت

$$\delta_l(n)=\sum_{e\in\hat{G}}(\delta_l,e)\,e(n)$$

$$(\delta_l,e)=\frac{1}{|G|}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*(q)}\delta_l(n)\,\overline{e(n)}=\frac{1}{|G|}\overline{e(l)}$$

$$\delta_\ell(n) = \frac{1}{|G|}\sum_{e\in\hat{G}} \overline{e(\ell)}\, e(n)$$

$$\sum_{p \overset{g}{\equiv} \ell} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \text{ اول}} \frac{\delta_\ell(p)}{p^s} = \frac{1}{|G|}\sum_{p}\sum_{e\in\hat{G}} \frac{\overline{e(\ell)}\, e(p)}{p^s}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{e\in\hat{G}} \overline{e(\ell)} \sum_{p \text{ اول}} \frac{e(p)}{p^s}$$

<u>قضیه</u>: اگر χ یک مشخصه غیربدیهی باشد آنگاه $\sum \frac{\chi(p)}{p^s}$ وقتی $s \to 1^+$ کران‌دار می‌ماند.

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

گزاره: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$ برای $s>1$ برقرار است.

$$\log L(s,\chi) = -\sum \log\left(1-\chi(p)p^{-s}\right)$$

$$= \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و شش ۹۶/۱۰/۲

ادامه اثبات قضیه دیریکله:

$$\sum_{p \overset{q}{\equiv} l} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{|\mathbb{Z}_q^*|} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \left[\sum_{p \text{ اول}} \frac{\chi(p)}{p^s} \right]$$

χ_0 تابع مشخصه بدیهی می‌گیریم و توسیع آن را روی $\mathbb{Z}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & (n,q)=1 \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases}$$

کافی است نشان دهیم: ① برای $\chi = \chi_0$ عبارت $\sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s}$ وقتی $s \to 1^+$ بیکران است.

② اگر $\chi \neq \chi_0$، $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ وقتی $s \to 1^+$ کران دار است.

اثبات ① : $\chi_0(p)$ تنها وقتی برابر صفر است که $(p,q)\neq 1$ یعنی p یک مقسوم‌علیه اول q باشد که تعداد آن متناهی است. بنابراین

$$\sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \sum_p \frac{1}{p^s} - \left(\sum_{p|q} \frac{1}{p^s}\right)$$

مجموع متناهی است.

بنابر مطلب جلسه قبل $\sum_p \frac{1}{p^s}$ وقتی $s \to 1^+$ واگرا است.

اثبات ۲

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

تعمیم فرمول اویلر:

$$L(s,\chi) = \prod_{p} \frac{1}{(1-\chi(p)p^{-s})}$$

اثبات مشابه حالت قبل است ولی باید توجه کرد که تعداد $\chi(n)$ یک عدد مختلط است.

تعریف لگاریتم در صفحه مختلط:

$$\exp(x+iy) := e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}$$

$$\exp(\log z) \stackrel{?}{=} z \implies |z| = e^{\operatorname{Re}(\log z)}$$

لگاریتم حقیقی

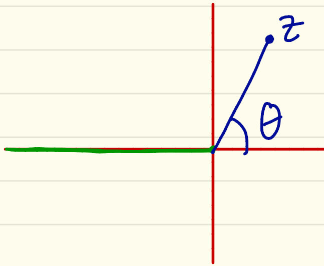
$$\implies \operatorname{Re}(\log z) = \ln |z|$$

$$\log z = x + iy \Rightarrow x = \ln|z|$$

$$\Rightarrow z = \exp(x+iy) = e^{x}(\cos y + i\sin y) = |z|\, e^{iy} \Rightarrow y = \arg z$$

برای انتخاب y باید یک شاخه از آرگومان را انتخاب کنیم که همواره با حذف یک نیم خط از صفحه به دست می‌آید.

مثلاً با حذف نیم خط $\theta = \pi$ در صفحه مختلط همواره $\arg z$ را بین $-\pi$ و π انتخاب می‌کنیم.



$$\log z := \ln|z| + i\theta$$

در این شاخه لگاریتم، $\log \frac{1}{1-z}$ به ازای $|z| \leq 1$ و $z \neq 1$ تعریف می‌شود.

تمرین:

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \qquad |z| < 1$$

گزاره: اگر a_n اعداد مختلطی که $a_n \neq 1$ برای هر n. به علاوه می‌دانیم که $\sum |a_n|$ همگرا است. آنگاه

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n}$$

همگرا است.

اثبات - می‌توان فرض کرد که هم $|a_n|<1$ و در نتیجه $\log(1-a_n)$ در شاخه $\theta=\pi$ به ازای هر n تعریف می‌شود.

$$A_N=\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-a_n} \Longrightarrow \log A_N = \sum_{n=1}^{N} \log(1-a_n) + 2\pi i k_N$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \left[a_n + O(|a_n|^2)\right] + 2\pi i k_N$$

شاید با سری $\sum 2|a_n|$

همگرا است

$$\Longrightarrow A_N = \exp\left(-\sum_{n=1}^{N} a_n + O(|a_n|^2)\right)$$

گزاره: (تعمیم فرمول اویلر) وقتی χ یک مشخصه است داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

برای $s>1$

اثبات. عبارت سمت راست بنابر گزاره قبل همگراست. از طرفی $|\chi(n)|=1$ و در نتیجه

$$\left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| = \frac{1}{n^s} \Longrightarrow \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$$ همگراست.

$$\prod_{N,M} = \prod_{p\leq N}\left(1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\cdots+\frac{\chi(p^M)}{p^{Ms}}\right)$$

$$= \prod_{p\leq N} \frac{1-\chi(p^{M+1})p^{-Ms}}{1-\chi(p)p^{-s}} \xrightarrow{\text{وقتی } M\to\infty} \prod_{p\leq N}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

از طرفی

$$\prod_{M,N} = \sum_{n\leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} + \text{error}$$

$$|\text{error}| \leq \sum_{n>N} \frac{|\chi(n)|}{n^s} < \epsilon$$

به ازای ϵ دلخواه N را به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم که رابطه بالا درست باشد آنگاه داریم:

$$\left|\prod_{M,N} - \sum_{n\leq N} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| < \epsilon$$

به ازای M های به اندازه کافی بزرگ (در واقع از بزرگترین توانی که در تجزیه اعداد کوچکتر از N ظاهر می‌شود)

اکنون $M \to \infty$ داریم

$$\left|\prod_{p\leq N} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} - \sum_{n\leq N} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leq \epsilon$$

حال وقتی $N \to \infty$ تساوی مورد نظر به دست می‌آید.

سوال اصلی: $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ کران دار است وقتی $s\to 1^+$ و $\chi\neq\chi_0$.

ایده: اگر $\log$ در تساوی زیر برقرار باشد:

$$2k\pi i + \log L(s,\chi) = \sum_p \log\left(1-\chi(p)p^{-s}\right) = \sum \frac{\chi(p)}{p^{-s}} + O(p^{-2s})$$

باید نشان دهیم $L(s,\chi)$ وقتی $s\to 1^+$ کران دار است به علاوه از صفر فاصله دارد.

گزاره: اگر $\chi\neq\chi_0$ داریم: (۱) تابع $L(s,\chi)$ برای $0<s<\infty$ به طور پیوسته مشتق پذیر است.

(۲) ثابت‌های $c,c'>0$ وجود دارند که

$$L(s,\chi) = 1 + O(e^{-cs}) \quad \text{as} \quad s\to\infty$$

$$L'(s,\chi) = O(e^{-c's}) \quad \text{as} \quad s\to\infty$$

لم: اگر χ یک مشخصه غیربدیهی باشد، آنگاه

$$\left|\sum_{n=1}^{K}\chi(n)\right| \leq \varphi(q)$$

به ازای هر K.

اثبات.

$$S=\sum_{n=1}^{q}\chi(n)$$

$$(m,q)=1 \qquad S\chi(m)=\sum_{n=1}^{q}\chi(n)\chi(m)=\sum_{n=1}^{q}\chi(nm)=\sum_{l=1}^{q}\chi(l)=S$$

χ غیربدیهی است $\Rightarrow \exists m,\ (m,q)=1,\ \chi(m)\neq 1 \Rightarrow S=0$

اثبات گزاره:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \Rightarrow |S_N| \le \varphi(q)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{N-1} S_n \underbrace{\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)}_{f_n(s)} + \frac{S_N}{N^s}$$

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n f_n(s)$$

$$f_n(s) = g(n) - g(n+1) = g'(\alpha) = -s\alpha^{-s-1} \Leftarrow g(x) = x^{-s}$$ تابع

به ازای $n \le \alpha \le n+1$.

$$\Rightarrow |f_n(s)| \le \frac{s}{n^{s+1}}$$ به ازای $0 < s$

بنابر آزمون وایراشتراس و اینکه مقادیر S_n کران دار است نتیجه می‌شود که سری $\sum S_n f_n(s)$

همگرای یکنواخت است . در نتیجه $L(s,\chi)$ به ازای $s>0$ تابع پیوسته است.

برای اینکه نشان دهیم $L(s,\chi)$ نسبت به s مشتق‌پذیر است باید ثابت کنیم $\sum S_n f_n'(s)$ همگرای یکنواخت است.

$$f_n'(s) = -(\log n)\, n^{-s} + \log(n+1)\,(n+1)^{-s}$$

حال قرار دهید $h(x)=\log x \cdot x^{-s}$ داریم:

$$f_n'(s) = h(n+1)-h(n) = h'(\beta) \qquad n\le \beta \le n+1$$

$$h'(x) = x^{-s-1} - s\log x\; x^{-s-1}$$

$$|f_n'(s)| \le |1-s\log\beta|\cdot|\beta|^{-s-1} \le \underbrace{|s\log(n+1)-1|}_{\le O(n^{\epsilon})}\, n^{-s-1} = O(n^{-s-1+\epsilon})$$

بنابراین به‌ازای $s > \epsilon$ سری $\sum_n s_n f_n'(s)$ همگرای یکنواخت است یعنی $L(s,\chi)$ به‌ازای $s > \epsilon$ مشتق‌پذیر است. و چون ϵ را می‌توان به مقدار دلخواه کوچک کرد بنابراین $L(s,\chi)$ در $s > 0$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

اثبات قسمت (ii)

$$\left| L(s,\chi) - 1 \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 2^{-s}\, O(1) = e^{-\log 2 \times s} . O(1)$$

برای s به اندازه کافی بزرگ.

$$\left| L'(s,\chi) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} -s \log n \;\frac{\chi(n)}{n^{s+1}} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s \log n}{n^{s+1}} \leq 2^{-s} . O(1)$$

نتیجه: وقتی $\chi \neq \chi_0$ ، مقدار $L(1,\chi)$ یک عدد ژن دارات .

نکته: برای تکمیل اثبات قضیه دیریکله تنها باید نشان دهیم $L(1,\chi) \neq 0$.

یک مطلب مهم: $\log L(s,\chi)$ چگونه تعریف می‌شود؟

$$\log L(s,\chi) := -\int_s^\infty \frac{L'(t,\chi)}{L(t,\chi)}\, dt$$

گزاره: (i) $$\frac{d}{ds}\log L(s,\chi) = \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

$$\exp(\log L(s,\chi)) = L(s,\chi) \quad \text{(ii)}$$

آنالیز فوریه

جلسه بیست و هفت ۹۶/۱۰/۴

ادامه اثبات قضیه دیریکله :

$L(1,\chi)\neq 0$ وقتی $\chi\neq\chi_0$.

لم ۱: اگر $s>1$ ، آنگاه $\prod_{\chi} L(s,\chi)\geq 1$ که حاصلضرب روی همه مشخصه‌های $\mathbb{Z}^*(q)$ محاسبه می‌شود. (در واقع این حاصلضرب یک عدد حقیقی است)

اثبات-

$$L(s,\chi)=\prod_{p}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}=\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p^{s}}$$

$$\prod_{\chi} L(s,\chi)=\prod_{\chi}\exp\big(\log L(s,\chi)\big)=\exp\Big(\sum_{\chi}\log L(s,\chi)\Big)$$

$$=\exp\Big(-\sum_{\chi}\sum_{p}\log\big(1-\chi(p)p^{-s}\big)\Big)$$

$$=\exp\Big(+\sum_{\chi}\sum_{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\chi(p)p^{-s}\big)^{k}}{k}\Big)$$

که در رابطه آخر از تساوی $\log(1-z) = -\sum \frac{z^k}{k}$ برای $|z|<1$ استفاده شده است.

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = \exp\left(\sum_{p} \sum_{k} \sum_{\chi} \frac{\chi(p^k)}{k p^{ks}} \right)$$

لذا فرض تابع
$$\alpha(n) = \begin{cases} |Z_q^*| & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. سری فوریه این تابع

$$\alpha = \sum_{\chi} (\alpha,\chi)\,\chi = \sum_{\chi} \chi$$

در نتیجه

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = \exp\Big(\underbrace{\sum_{p} \sum_{k} \frac{\alpha(p^k)}{k p^{ks}}}_{\text{یک عدد حقیقی مثبت است}} \Big) \geq 1$$

لم ۲: (i) اگر $L(1,\chi)=0$ آنگاه $L(1,\bar{\chi})=0$

(ii) اگر $\chi\neq\chi_0$ و $L(1,\chi)=0$ آنگاه $|L(s,\chi)|\leq C|s-1|$ برای $1\leq s\leq 2$

(iii) $|L(s,\chi_0)|\leq \dfrac{C}{|s-1|}$ برای $1<s\leq 2$

اثبات ـ (i) واضح است زیرا $\overline{L(1,\chi)}=L(1,\bar{\chi})$

(iii)
$$L(s,\chi_0)=\prod_p \frac{1}{1-\chi_0(p)p^{-s}}=\zeta(s)\times\underbrace{\prod_{p|q}(1-p^{-s})}_{\text{تعداد متناهی جمله}}$$

از طرفی می‌دانیم $|\zeta(s)|\leq \dfrac{C}{|s-1|}$ زیرا

$$\zeta(s)=\sum_n \frac{1}{n^s}\leq 1+\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=1+\frac{1}{s-1}$$

$$|L(s,\chi)| = |L(s,\chi) - \underbrace{L(1,\chi)}_{=0}| = |L'(s_0,\chi)|\,|s-1| \qquad \text{(ادامه)}$$

برای یک مقدار s $1 \le s_0 \le s$ و از پیوستگی مشتق L ادعا نتیجه می‌شود.

قضیه: اگر $\chi \neq \chi_0$ یک مشخصه مختلط مقدار باشد، آنگاه $L(1,\chi) \neq 0$

__اثبات__: اگر $L(1,\chi)=0$ آنگاه بنابر لم ۲ داریم $L(1,\bar{\chi})=0$ و $\chi \neq \bar{\chi}$ در نتیجه در حاصلضرب $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ حداقل دو جمله به صفر میل می‌کنند که هر کدام با سرعت $|s-1|$. از طرفی تنها جمله در این حاصلضرب که بیکران می‌شود $\chi=\chi_0$ است و با سرعت $\frac{1}{|s-1|}$ در نتیجه این حاصلضرب باید با سرعت $|s-1|$ صفر شود

که با لم ۱ تناقض دارد.

ادامه اثبات در حالتی که $\chi = \bar{\chi}$.

در این حالت χ تنها مقادیر ± 1 را اتخاذ می‌کند.

ایده اثبات:

$$F(m,n) = \frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}}$$

$$S_N = \sum\sum_{mn \leq N} F(m,n)$$

گزاره ۳ (i) $S_N \geq c \log N$ برای یک ثابت c.

$$S_N = 2N^{1/2} L(1,\chi) + O(1) \quad (ii)$$

بوضوح از گزاره فوق اثبات قضیه دیریکله کامل می‌شود.

روش محاسبه $F(m,n)$:

(۱) در راستای هذلولی
$$S_N = \sum_{1 \le k \le N} \sum_{mn = k} F(m,n)$$

(۲) عمودی
$$S_N = \sum_{1 \le m \le N} \sum_{1 \le n \le \frac{N}{m}} F(m,n)$$

(۳) افقی
$$S_N = \sum_{1 \le n \le N} \sum_{1 \le m \le \frac{N}{n}} F(m,n)$$

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \sum_{mn=k} \frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{n|k} \chi(n)$$

لم ۴:

$$\sum_{n|k} \chi(n) \geq \begin{cases} 0 & \text{for all } k \\ 1 & \text{for } k=l^2 \end{cases}$$

اثبات: اگر $k=p^\alpha$ که p عدد اول است داریم

$$\sum_{n|p^\alpha} \chi(n) = 1 + \chi(p) + (\chi(p))^2 + \cdots + (\chi(p))^\alpha$$

اگر $\chi(p)=1$ مجموع بالا از $\alpha+1$ بزرگتر است و اگر $\chi(p)=-1$ مجموع فوق صفر است هرگاه α عددی فرد باشد و یک است هرگاه α زوج باشد.

اگر $k=p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ به وضوح

$$\sum_{n|k} \chi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{n|p_i^{\alpha_i}} \chi(n) \right)$$

که اثبات را کامل می‌کند.

اثبات قسمت (خ) گزاره ۳ :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1/2}} \left(\sum_{n|k} \chi(n) \right)$$

بنابر لم ۴ : $\Longleftarrow$

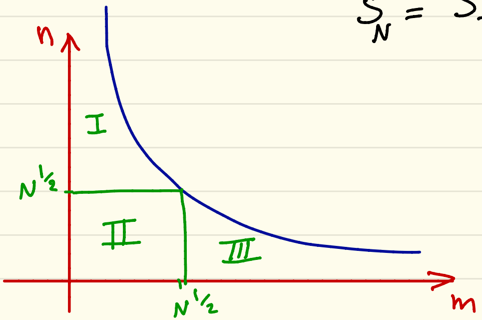
$$\geq \sum_{1 \leq k = \ell^2 \leq N} \frac{1}{\ell}$$

از طرفی $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$ که اثبات را کامل می‌کند.

در واقع داریم

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + O(1)$$

اثبات قسمت (ت) گزاره ۳ :



$$S_N = S_{I} + S_{II} + S_{III}$$

ادعا : $S_{I} = O(1)$

$$S_{I} = \sum_{m < N^{1/2}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{N^{1/2} < n \leq \frac{N}{m}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}}$$

لم ۵ : برای اعداد صحیح $0 < a < b$ داریم :

$$\sum_{n=a}^{b} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} = O(a^{-1/2})$$

لم ۶ :

$$\sum_{1 \leq m \leq N} \frac{1}{m^{1/2}} = 2N^{1/2} + O(1)$$

لم ۵ و ۶ ادعای $S_{I} = O(1)$ را اثبات می‌کند.

$$S_{II}+S_{III} = \sum_{\substack{1\le n\le N^{1/2}\\ mn\le N}} \frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}} = \sum_{1\le n\le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \underbrace{\sum_{m\le \frac{N}{n}} \frac{1}{m^{1/2}}}_{2\left(\frac{N}{n}\right)^{1/2}+O(1)}$$

$$= \sum_{1\le n\le N^{1/2}} 2N^{1/2}\frac{\chi(n)}{n} + O\left(\sum_{1\le n\le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}}\right)$$

$$L(1,\chi) - \sum_{n\le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{n>N^{1/2}}\frac{\chi(n)}{n} = O(N^{-1/2})$$ از لمی

لم ۷: $$\sum_{n=a}^{b}\frac{\chi(n)}{n} = O(a^{-1})$$

$$\Rightarrow\ S_{II}+S_{III} = 2N^{1/2}\left(L(1,\chi)+O(N^{-1/2})\right)+O(1)$$

$$= 2N^{1/2}L(1,\chi)+O(1)$$