①

$$u = \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}$$

معادلات کوشی - ریمان در مختصات قطبی

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases} \Rightarrow v_\theta = -\frac{1}{r}(\cos\theta+\sin\theta)$$

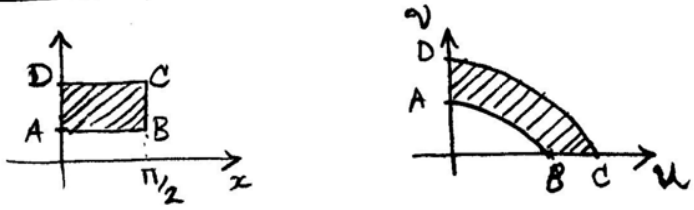
$$\Rightarrow v(r,\theta) = -\frac{1}{r}(\sin\theta-\cos\theta)+C(r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2}(\sin\theta-\cos\theta)+C'(r) \\ -\frac{1}{r} u_\theta = -\frac{1}{r^2}(-\sin\theta+\cos\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C'(r)=0 \Rightarrow C(r) = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{r}(\sin\theta-\cos\theta) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

②



$$w = \sin z = \underbrace{\sin x\cosh y}_{u} + i\,\underbrace{\cos x\sinh y}_{v}$$

تصویر پاره‌خط AB $\Rightarrow y=1 \Rightarrow \left(\frac{u}{\cosh 1}\right)^2+\left(\frac{v}{\sinh 1}\right)^2=1$

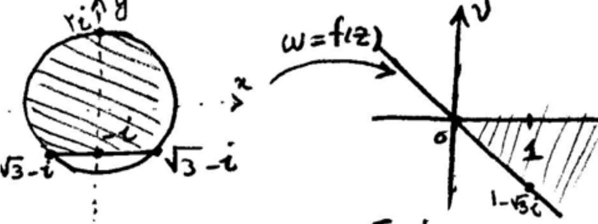
$$0<x<\pi/2 \Rightarrow u,v>0$$

تصویر BC $\Rightarrow \begin{cases} x=\pi/2 \\ 1\le y\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\cosh y \\ v=0 \end{cases}$

تصویر CD $\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ 0<x<\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{u}{\cosh 2}\right)^2+\left(\frac{v}{\sinh 2}\right)^2=1 \\ u,v>0 \end{cases}$

تصویر AD $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1\le y\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=\sinh y \end{cases}$

③ الف:



نگاشت موبیوسی که $\begin{cases} \sqrt3-i \to \infty \\ -i \to 1 \\ -\sqrt3-i \to 0 \end{cases}$ تصویر کند، خط $\ldots z=-1$

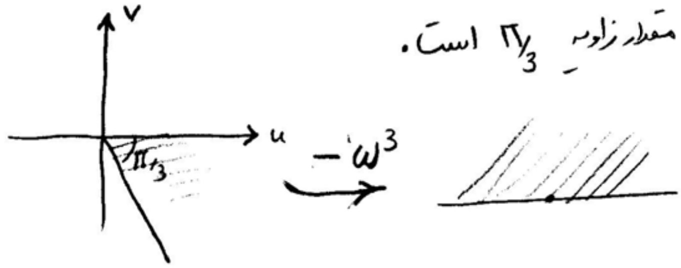
را در صفحه $W=u+iv$ به $v=0$ تصویر می‌کند و تصویر دایره $|z|=2$، خطی است که از مبدأ می‌گذرد. نگاشت موبیوس فوق برابر است با:

$$w = -\frac{z+\sqrt3+i}{z-\sqrt3+i}$$

$$f(2i) = -\frac{1+\sqrt3 i}{-1+\sqrt3 i} = 1-\sqrt3\, i$$

بنابراین تصویر دایره نیم خطی است که از مبدأ و نقطه $1-\sqrt3 i$ می‌گذرد و ناحیه D به زاویه هاشور زده بالا تصویر می‌شود.

مقدار زاویه $\pi/3$ است.

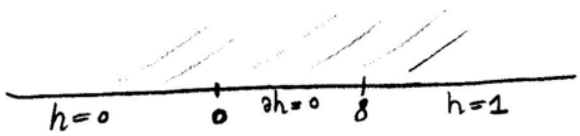


نگاشت مورد نظر:
$$T(z) = \left(\frac{z+\sqrt3+i}{z-\sqrt3+i}\right)^3$$

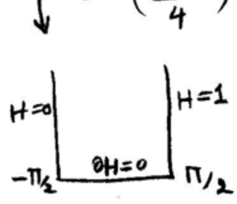
ب: با نگاشت T، ناحیه D و شرایط مرزی روی نیم صفحه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$T(\sqrt3-i)=\infty, \quad T(-\sqrt3-i)=0$$

$$T(-i)=-1, \quad T(2i)=8$$



$$\downarrow \sin^{-1}\left(\frac{z-4}{4}\right)$$



$$H(u,v) = \frac{1}{\pi}u + 1/2$$

$$\hookrightarrow h(x,y) = \frac{1}{\pi}u + 1/2, \quad u = \mathrm{Re}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{T(z)-4}{4}\right)\right\}$$

۴)

$$f(z)=\tan^{-1}\frac{1}{z} \Rightarrow f'(z)=\frac{-1}{z^2+1}$$

ناحیه $0<|z|<1$

$$f'(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n$$

$$\Rightarrow f(z)=c_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}z^{2n+1}$$

$$c_0=\lim_{z\to 0}f(z)=\pi/2$$

ناحیه : $1<|z|$

$$f'(z)=\frac{-1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+1/z^2}$$

$$=-1/z^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+2}}$$

۵) الف :

$$=\int_{|z|=2}\frac{\sin\frac{4}{z}}{z^2+1}dz=2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\Big)$$

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{\sin\frac{4}{z}}{z+i}\Bigg|_{z=i}=\frac{-i}{2}\sin(-4i)=-\tfrac{1}{2}\sinh 4$$

$z=i$ قطب ساده است

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\frac{\sin 4/z}{z-i}\Bigg|_{z=-i}=-\tfrac{1}{2}\sinh 4$$

$z=0$ تکینگی اساسی دارد.

$$\frac{\sin\frac{4}{z}}{z^2+1}=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{4}{z}\right)^{2k+1}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n\right]$$

ضریب جمله z^{-1} عبارت است از:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 4^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot(-1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=-i\sin(4i)=\sinh 4$$

مقدار انتگرال برابر صفر است.

(ب

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ix}}{x^4+1}dx=$$

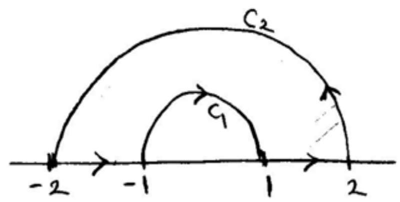
$$\mathrm{Im}\left(\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^3e^{iz}}{z^4+1},e^{i\pi/4}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{z^3e^{iz}}{z^4+1},e^{3i\pi/4}\right)\right]\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(\pi i\left[\frac{z^3e^{iz}}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{i\pi/4}}+\frac{z^3e^{iz}}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{3i\pi/4}}\right]\right)$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\pi i}{4}\left[e^{\frac{\sqrt2}{2}(i-1)}+e^{\frac{\sqrt2}{2}(-i-1)}\right]\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-\sqrt2/2}\cos\frac{\sqrt2}{2}$$

(ب :



$$=\left[\int_1^2+\int_{-2}^{-1}+\int_{C_1}+\int_{C_2}\right]\frac{z}{\bar z}dz$$

$$=\int_1^2 1\,dz+\int_{-2}^{-1}1\,dz+\int_{C_1}z^2dz+\int_{C_2}\frac{z^2}{4}dz$$

$$=1+1+\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}+\frac{z^3}{12}\Bigg|_{2}^{-2}=4/3$$