(۱) $f(x)$ تابع زوج است با دوره تناوب π .

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| \cos(2nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-4}{\pi}\times\frac{1}{4n^2-1} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx)$$

تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است:

$$0 = f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 1/2$$

بنابر تساوی پارسوال:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x))^2\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

---

(۲) الف-

$$\mathcal{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2} \cos x \cos\omega x\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(\omega+1)x}{\omega+1} + \frac{\sin(\omega-1)x}{\omega-1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2}{1-\omega^2}$$

ب) بنابر فرمول تبدیل وارون و پیوستگی تابع f :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\, d\omega$$

۳

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \Rightarrow \frac{r^2R''+rR'+9R}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0$$

معادله اشترم لیوویل :
$$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi/2)=0\end{cases}$$

از حل معادله بالا به مقادیر ویژه $\lambda_n=(2n+1)^2$ و توابع ویژه $\Theta_n(\theta)=\sin(2n+1)\theta$ می‌رسیم

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\,\Theta_n(\theta) \Rightarrow r^2R_n''+rR_n'+(9-\lambda_n)R_n=0$$

معادله مشخصه فرق بصورت $z(z-1)+z+9-\lambda_n=0$ است . $z^2=\lambda_n-9=(2n+1)^2-9$

$$n\geq 2 \Rightarrow R_n(r)=a_n r^{\sqrt{(2n+1)^2-9}}+b_n r^{-\sqrt{(2n+1)^2-9}}$$

$$n=1 \Rightarrow R_1(r)=a_1+b_1\ln r$$

$$n=0 \Rightarrow R_0(r)=a_0\cos(2\sqrt{2}\ln r)+b_0\sin(2\sqrt{2}\ln r)$$

برای اینکه $u(0,\theta)$ خوش‌تعریف باشد باید وقتی $r\to 0$ ، $R_n(r)$ همگرا باشد ، لذا $b_n=0$ برای $n\geq 0$
و $a_0=a_1=0$

$$f(\theta)=u(1,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\sin(2n+1)\theta$$

مسأله برای توابعی که به صورت بالا نوشته شوند ، جواب دارد ، یعنی دو جمله اول سری فوریه تعمیم یافته f باید صفر باشند.

$$\int_0^{\pi/2}f(\theta)\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}f(\theta)\sin 3\theta\,d\theta=0$$

$$v(x,t) = u(x,t) - (x+1)$$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x) \Rightarrow a_n'' + (n\pi)^2 a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

شرایط اولیه $\Rightarrow a_n(0) = a_n'(0) = 0$

$\Rightarrow$ $n \neq 1$ برای $a_n(t) = 0$

$$a_1(t) = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t + \frac{1}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow c_1 = -1/\pi^2 \quad , \quad c_2 = 0$$

$$u(x,t) = 1/\pi^2 (1 - \cos \pi t) \sin \pi x + (x+1)$$

۵ از دامنه متغیرها نتیجه می‌شود که تبدیل فوریه استفاده نمی‌شود.

تبدیل نسبت t چون مشتق مرتبه اول دارد تنها گزینه تبدیل لاپلاس است. اما اگر تبدیل بگیریم به معادله دیفرانسیل عادی مرتبه دو می‌رسیم که برای حل آن تنها یک شرط مرزی داریم. لذا قابل استفاده نیست.

$$L(s,x) = \mathcal{L}\{u(x,t)\} \Rightarrow \begin{cases} sL - u(x,0) - L_{xx} = \frac{e^{-x}}{s^2} \\ L_x(s,0) = 0 \end{cases}$$

تبدیل نسبت به x : برای استفاده از تبدیل لاپلاس u_{xx} باید مقادیر $u(0,t)$ و $u_x(0,t)$ را بدانیم که با توجه به داده‌های مسأله چنین امری ممکن نیست. برای استفاده از تبدیل فوریه سینوسی باید $u(0,t)$ را بدانیم. لذا تنها گزینه ممکن تبدیل فوریه کسینوسی است.

$$U(\omega,t) = \mathcal{F}_c(u(x,t)) \Rightarrow U_t + \omega^2 U + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u_x(0,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t}{1+\omega^2}$$

$$U(\omega,t) = A e^{-t\omega^2} + \underbrace{a+bt}_{\text{جواب خصوصی}} \qquad b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} \;,\; a = \frac{-b}{\omega^2}$$

$$U(\omega,0) = 0 \Rightarrow A = -a$$