

باحسن (۴)

بایان تمام درس توپولوژی (فرانسوی مقدماتی) - بهمن ۸۵

۱- ثابت کنید از هر ضمیمه K - بعدی یک غوطه ورسازی یک به یک به \mathbb{R}^{2k+1} وجود دارد.

۲- قضیه ۴- همسانی را برای ضمیمه‌های فشرده ثابت کنید.

۳- X, Y و Z سه ضمیمه همبند دار، Z زیر ضمیمه Y ، X له دار و Y بدون له هستند. $f: X \rightarrow Y$

نکاتش هموار است به طوری که $f \notin Z$ و $df \notin Z$. دو تعریف برای همت له $f(z)$ بیان کنید و رابطه بین آنها را با اثبات نشان دهید.

۴- الف) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ هموار است. تعریف میدان گرادیان ∇f را بیان کنید.

ب) اگر $\lambda(t)$ خم انتگرال میدان گرادیان باشد، نشان دهید تابع f روی $\lambda(t)$ صعودی است.

ج) ثابت کنید اگر M فشرده باشد، حد $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ وجود دارد و برابر یکی از نقاط بحرانی f است.

د) با فرض فشردگی M ثابت کنید اگر تابع f دقیقاً دارای n نقطه بحرانی باشد، آنگاه M را با n دسک

می‌توان پوشاند.

۵- در این سوال به دنبال توسعه نظریه نقطه ثابت شتر هستیم به طوری که جوابهای معادله $f(x) = g(x)$ را

برای توابع هموار $f, g: M \rightarrow N$ بتوان بررسی کرد. ($\dim M = \dim N$)

الف) $L(f, g)$ را تعریف کنید به طوری که اگر $L(f, g) \neq \emptyset$ نتیجه شود معادله $f(x) = g(x)$ دارای جواب است.

ب) تعریفی برای عبارت " f و g نسبت به هم لفت شتر هستند " بیان کنید و نشان دهید اگر f و g این خاصیت

را نداشته باشند، نکاتش هموار f وجود دارد که نسبت به g لفت شتر است.

ج) دو تعریف برای عدد موضعی لفت شتر $L_x(f, g)$ بیان کنید که x یک جواب معادله $f(x) = g(x)$ است. ثابت

کنید این دو تعریف معادل هستند.