به نام خدا

زمان تحویل: ۸۸/۱۱/۴

پایان ترم آنالیز تابعی کاربردی

۱- فرض کنید $\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$ ، $u\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ و قرار دهید:

$$U(x)=\begin{cases} u(x) & x_n>0 \\ 0 & x_n\le 0\end{cases}$$

الف - نشان دهید ثابت $C=C(u,k)$ وجود دارد که برای هر $\xi=(\xi',\xi_n)\in\mathbb{R}^n$

$$|\hat{U}(\xi)|\le C\,(1+|\xi'|)^{-k}\,(1+|\xi_n|)^{-1}$$

ب - نشان دهید $U\in\tilde{H}^s(\Omega)$ برای $s<\frac{1}{2}$.

ج - نشان دهید اگر $\partial_n^k u(x',0)=0$ برای $0\le k\le j$ ، آنگاه $U\in\tilde{H}^s(\Omega)$ برای $s<j+\frac{3}{2}$.

۲- الف - برای $\alpha>0$ و $1\le p<\infty$ نامساوی‌های زیر را ثابت کنید:

$$\left[\int_0^\infty\left(x^{-\alpha}\int_0^x|f(y)|\,\frac{dy}{y}\right)^p\frac{dx}{x}\right]^{1/p}\le\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^\infty|y^{-\alpha}f(y)|^p\,\frac{dy}{y}\right)^{1/p}$$

$$\left[\int_0^\infty\left(x^{\alpha}\int_x^\infty|f(y)|\,\frac{dy}{y}\right)^p\frac{dx}{x}\right]^{1/p}\le\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^\infty|y^{\alpha}f(y)|^p\,\frac{dy}{y}\right)^{1/p}$$

ب - برای $-\infty<a<b<\infty$ و $f\in L^p(a,b)$ ثابت کنید:

$$\int_a^b\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x|f(t)|\,dt\right)^p dx\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^b|f(t)|^p\,dt$$

$$\int_a^b\left(\frac{1}{b-x}\int_x^b|f(t)|\,dt\right)^p dx\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^b|f(t)|^p\,dt$$

ج - برای $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ثابت کنید:

$$\int_a^b\int_a^b\left|\frac{u(x,x)-u(y,y)}{x-y}\right|^p(\sqrt{2}\,dx)\,(\sqrt{2}\,dy)\le\left(\frac{2p}{p-1}\right)^p\int_a^b\int_a^b|\partial_1u(x,y)|^p+|\partial_2u(x,y)|^p\,dx\,dy$$

(راهنمایی: $u(x,x)-u(y,y)=\int_y^x\partial_2u(x,t)\,dt+\int_y^x\partial_1u(t,y)\,dt$)

د - اگر $\gamma u(x')=u(x',0)$ برای هر $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ و $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ثابت کنید:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\gamma u(x')-\gamma u(y')|^p}{|x'-y'|^p}\,dx'\,dy'\le C\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_ju(x)|^p\,dx$$

ه - نشان دهید $\gamma u\in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ و $\|\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ و در پایان نتیجه بگیرید که عملگر اثر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma: W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$$

۳- اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $K : X \longrightarrow Y$ فشرده، ثابت کنید اگر $x_i \rightharpoonup x$ به طور ضعیف در X آنگاه $Kx_i \longrightarrow Kx$ به طور قوی در Y.

۴- توزیع $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ را در نظر بگیرید که $\operatorname{Supp} u \subseteq K \subset\subset \Omega$. نشان دهید توزیع یکتای $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد به طوری که $\tilde{u} = u$ روی Ω و $\tilde{u} = 0$ روی $\mathbb{R}^n \setminus K$. همچنین نشان دهید که اگر $u \in H^s(\Omega)$ آنگاه

$$\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

که ضریب ثابت C تنها به s و K وابسته است.

۵- الف- برای هر $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ و $s \in \mathbb{R}$ ثابت کنید

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|} (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|} (1+|\eta|^2)^s$$

ب- به کمک نامساوی بالا نشان دهید که اگر $\phi \in C_0^K(\mathbb{R}^n)$ و $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ که $|s| \leq K$، آنگاه $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ و

$$\|\phi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

۶- اگر J_ε توابع منظم‌ساز باشند که به صورت $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon})$ تعریف می‌شوند، قرار دهید $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u$. نشان دهید اگر $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ آنگاه

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad , \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$