

گروه الف

۱- اگر عملگر $B \in L(Y, X)$ منظم ساز و طرفه عملگر نرواهم $A \in L(X, Y)$ باشد، نشان دهید در صورتیکه

$$\|E\|_{L(X, Y)} \leq \frac{1}{\|B\|_{L(Y, X)}} \quad A + E \text{ نرواهم است و } \text{index}(A + E) = \text{index} A \quad (X, Y \text{ فضاها باناخ هستند})$$

۲- اگر $K: X \rightarrow Y$ فشرده باشد و $x_i \rightarrow x$ (به طور ضعیف در X)، ثابت کنید $Kx_i \rightarrow Kx$ (به طور قوی در Y)

۳- الف - برای هر $\eta \in \mathbb{R}^n$ و $s \in \mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$(1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{|\xi|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|\xi|} (1 + |\eta|^2)^s$$

ب - یک ناسازی بالا نشان دهید که اگر $\phi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ و $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ که $|\xi| \leq k$ ، آنگاه $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ و

$$\|\phi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

ج - اگر $u \in H^s(\Omega)$ در رابطه با $\phi u \in H^s(\Omega)$ چه می توان گفت؟

گروه ۰ ب

۱- H یک فضای هیلبرت حقیقی است و $A: H \rightarrow H^*$ عملگر خطی کرانداره خود الحاقی و مثبت معین است.

برای $f \in H^*$ تابع $J_f: H \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_f(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v)$$

الف- نشان دهید اگر $Au = f$ آنگاه $J_f(v) = J_f(u) + \frac{1}{2} \|u-v\|_A^2$

ب- نشان دهید برای هر $v, \delta \in H$ ، $J_f(v+\delta) = J_f(v) + (Av-f, \delta) + \frac{1}{2} \|\delta\|_A^2$

ج- از نسبت قابل تبعید بودن $Au = f$ اثبات کنید که $J_f(u) = \min_{v \in H} J_f(v)$

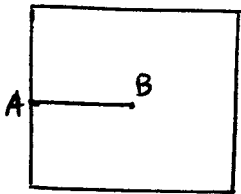
$$(\|u\|_A^2 = (Au, u))$$

۲- توزیع $u \in D^*(\Omega)$ را در نظر بگیرید که $\text{Supp } u \subseteq K \subset \subset \Omega$. نشان دهید توزیع $\tilde{u} \in D^*(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد

به طوری که $\tilde{u} = u$ روی Ω و $\tilde{u} = 0$ روی $\mathbb{R}^n \setminus K$. همچنین نشان دهید که اگر $u \in H^s(\Omega)$ آنگاه

$$\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{و} \quad \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

که ضریب ثابت C فقط به s و K وابسته است.



۳- Ω را مثل روبه در نظر بگیرید. (پاره خط AB جزء Ω نیست.)

نشان دهید که $C^\infty(\bar{\Omega})$ در $H^s(\Omega)$ برای $s > \frac{1}{2}$ چگال نیست.