



۱. برای هر عدد حقیقی مثبت  $\epsilon > 0$  نشان دهید که عدد گویای  $r$  وجود دارد که  $0 < r < x$ .
۲. ثابت کنید که کاردینالیته  $\mathbb{R}$  با  $\mathbb{R}^2$  برابر است.
۳. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که  $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ . نشان دهید مجموعه حدهای زیردنباله‌های همگرای این دنباله یک بازه بسته است با نقاط ابتدایی و انتهایی  $\liminf a_n$  و  $\limsup a_n$ .
۴. بازآرایش یک دنباله چیست؟ آیا باز آرایش یک دنباله همگرا لزوماً همگرا است؟
۵. ثابت کنید آزمون ریشه برای همگرایی سریها قوی‌تر از آزمون نسبت است. یک مثال بزنید که همگرایی آن با آزمون ریشه نشان داده می‌شود، اما با آزمون نسبت نتوان آن را اثبات کرد.
۶. اگر  $S$  زیرمجموعه همبند فضای متریک  $X$  باشد، ثابت کنید  $\bar{S}$  نیز همبند است.
۷. زیرمجموعه  $N$  از فضای متریک  $M$  که بیش از دو عضو دارد دارای این خاصیت است که هر  $A \subsetneq N$  در  $N$  باز است اگر و تنها اگر در  $M$  باز باشد. ثابت کنید در این صورت  $M$  در  $N$  باز است.

موفق باشید.