

# برنام دوست

مدت امتحان: ۳ ساعت

۸۷/۳/۲۳

پایان ترم آنالیز ریاضی ۱

۱- الف- ثابت کنید که اگر  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، آنگاه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  همگرا است.

ب- با یک مثال نشان دهید، شرط نزولی بودن دنباله در قسمت قبل ضروری است.

۲- الف- ثابت کنید که اگر تابع  $f: M \rightarrow N$  پیوسته، یک به یک و پوشا و فضای متریک  $M$  فشرده باشد،

تابع  $f^{-1}$  پیوسته است.

ب- با یک مثال نشان دهید، شرط فشرده‌گی  $M$  ضروری است.

۳- ثابت کنید مشتق هر تابع مشتق‌پذیر دارای خاصیت مقدار بینی است.

۴- نشان دهید که تنها تابع تحلیلی که بی‌نهایت ریشه در بازه متناهی  $(a, b)$  دارد، تابع ثابت صفر است.

۵- اگر تابع  $f$ ، انتگرال‌پذیر و  $\psi$  یک تابع دوسویی باشد که وارون آن لیپ‌شیتز است، ثابت کنید که  $f \circ \psi$  نیز

انتگرال‌پذیر است.

۶- اگر دنباله توابع انتگرال‌پذیر  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت به تابع  $f$  همگرا باشد، نشان دهید  $f$  نیز انتگرال‌پذیر

$$\text{است و } \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

۷- فرض کنید  $E$  مجموعه همه توابع لیپ‌شیتز  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  با ضریب لیپ‌شیتز یک، که در ضمن

$$u(0) = 0 \text{ است. ثابت کنید که تابع } \phi: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ با ضابطه } \phi(u) = \int_0^1 (u(x)^2 - u(x)) dx$$

ماکزیمم خود را روی  $E$  اتخاذ می‌کند.

۸- تابع  $f$  در بازه  $(a, b)$  دوبار مشتق‌پذیر است و  $M_1, M_2$  و  $M_3$  به ترتیب کوچکترین کران‌های بالا برای

$$|f(x)|, |f'(x)| \text{ و } |f''(x)| \text{ در این بازه باشند، ثابت کنید که } M_1^2 \leq 4M_2M_3.$$