بەنام او

در تمامی این سوالات M و N فضاهای متریک هستند.

۱) فرض کنید $f,g : M \to N$ توابعی پیوسته باشند.

(a) نشان دهید برای هر مجموعه $A \subset M$ داریم: $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(b) اگر A در M چگال باشد ثابت کنید $f(A)$ نیز در $f(M)$ چگال است.

اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، نشان دهید $f(x) = g(x)$ برای هر $x \in M$.(به عبارت دیگر یک تابع پیوسته با مقادیرش روی یک زیر مجموعه چگال از دامنه به طور کامل مشخص می‌شود.)

۲) فرض کنید تابع f بربازه فشرده $I \subset R$ تعریف شده و کراندار باشد، برای $A \subset I$، عدد

$$\omega_f(A) = sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\}$$

را « نوسان » f بر A می‌نامند. برای $x \in I$، نوسان f در x به اینصورت تعریف می‌شود:

$$\omega_f(x) = \lim_{h \to 0^+} \omega_f(B(x;h) \cap I)$$

ثابت کنید حد فوق همواره موجود است و $\omega_f(x) = 0$ اگر و تنها اگر f در x پیوسته باشد.

۳) برای تابع $f : M \to R$، مجموعه $\{(x,y) \in M \times R : y = f(x)\}$ ، نمودار f نام دارد.

(a) ثابت کنید اگر f پیوسته باشد نمودار (به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از $M \times R$) بسته است.

(b) ثابت کنید اگر f پیوسته و M فشرده باشد دراینصورت نمودار f فشرده است.

(c) ثابت کنید اگر نمودار f فشرده باشد آنگاه f پیوسته است.

(d) اگر نمودار f صرفاً بسته باشد آیا حکم فوق درست است؟

۴) فرض کنید $||.||$ یک نرم دلخواه روی R^n باشد، قرار دهید $B = \{x \in R^n : ||x|| \leq 1\}$، ثابت کنید B فشرده است.

۵) فرض کنید حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه ناتهی $A \subset M$ و $B \subset N$ در $M \times N$ فشرده است، ثابت کنید A و B به‌ترتیب در M و N فشرده هستند.

٦) بدون استفاده از قضیه هاینه—بورل ثابت کنید $[a,b]$ فشرده است.

راهنمایی: فرض کنید $\{U_\alpha\}$ پوششی باز برای $[a,b]$ باشد، مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$C = \{x \in [a,b] :$ تعدادی متناهی از عناصر $\{U_\alpha\}$ $[a,x]$ را می‌پوشاند. $\}$

۷) فرض کنید $\{K_n\}$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد و $K = \cap K_n$ ، اگر $\mu > 0$ موجود باشد به‌طوریکه برای هر n داشته باشیم $diamK_n \geq \mu$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $diamK \geq \mu$؟

۸) خانواده $\{V_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های باز M را یک پایه برای M می‌نامیم هرگاه: برای هر $x \in M$ و هر مجموعه باز $U \subset M$ شامل x، α موجود باشد به‌طوریکه $x \in V_\alpha \subset U$.

ثابت کنید هر فضای متریک فشرده M دارای یک پایه شماراست.(راهنمایی: برای هر عدد طبیعی n، همسایگی‌های به شعاع $\frac{1}{n}$ حول نقاط M را درنظر بگیرید.)

۹) فرض کنید M فشرده و $f : M \to N$ پیوسته است، با استفاده از لم عدد لبگ ثابت کنید f پیوسته یکنواخت است.

۱۰) برای هر یک از احکام زیر در صورت درست بودن برهانی ارائه دهید، در غیر اینصورت یک مثال نقض بزنید.

(a) اگر A همبند باشد $intA$ نیز همبند است.

(b) اگر A ناهمبند باشد $intA$ نیز ناهمبند است.

(c) اگر A همبند باشد $\overline{A}$ نیز همبند است.

(d) اگر A ناهمبند باشد $\overline{A}$ نیز ناهمبند است.

(e) اشتراک مجموعه‌های همبند، همبند است.

(f) اگر $A_۱ \supset A_۲ \supset ...$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های همبند و بسته از $R^۲$ باشد در اینصورت $A = \cap A_n$ همبند است.

۱۱) دو مجموعه $A, B \subset M$ را جدا از هم می‌گوییم هرگاه $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$.

(a) اگر $A, B \subset M$ دو مجموعه مجزا و باز باشند ثابت کنید A و B جدا از هم هستند.

(b) $p \in M$ و $\delta > ۰$ را تثبیت کنید و تعریف کنید:

$$A = \{q \in M : d(p,q) < \delta\}, B = \{q \in M : d(p,q) > \delta\}$$

نشان دهید A و B جدا از هم هستند.

(c) نتیجه بگیرید هر فضای متریک همبندِ دارای حداقل دو نقطه، ناشماراست.

۱۲) بدون استفاده از قضیه ٦۵ نشان دهید یک تابع پیوسته و پوشا از C (مجموعه کانتور استاندارد) به بازه $[۰, ۱]$ موجود است. (راهنمایی: برای $x \in C$ اگر $\{x_n\}$ بسط x در مبنای ۳ باشد در اینصورت هر x_n یا صفر است و یا دو.)

۱۳) یکتایی کامل ساز (completion): یک کامل ساز برای فضای متریک M، فضای متریک کامل X است به طوریکه M یک زیر فضای متریک X بوده و M در X چگال باشد.

(a) ثابت کنید M در $\widehat{M}$ (که در قضیه ۷٦ معرفی شد) چگال است.

(b) فرض کنید X و X' دو کامل ساز برای M باشند، ثابت کنید ایزومتری $i : X \to X'$ موجود است به طوریکه $i(p) = p$ برای هر $p \in M$.

(c) نشان دهید ایزومتری i با خاصیت فوق یکتاست.

(d) نتیجه بگیرید $\widehat{M}$ یکتاست.