

به نام او
 تمرین درس ریاضیات پیشرفته ۱
 آشنایی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱. تعیین کنید کدام یک از معادلات دیفرانسیل جزئی زیر خطی و کدام غیر خطی است. مرتبه آنرا نیز بیان کنید.

(الف) $u_{xx} + xu_y = y$ (ب) $uu_x - 2xyu_y = 0$

(پ) $u_x^2 + uu_y = 1$ (ت) $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

(ث) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$ (ج) $u_{xxx} + u_{xyy} + \log u = 0$

(چ) $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin u = e^y$

۲. نشان دهید هر یک از توابع زیر جواب معادله لاپلاس است.

$u(x, y) = x^2 - y^2,$ $u(x, y) = e^x \sin y,$ $u(x, y) = e^{2y} \cos 2x$

۳. فرض کنید f تابعی مشتقپذیر است. نشان دهید $u = f(xy)$ جواب معادله $xu_x - yu_y = 0$ است.

۴. فرض کنید f و g دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته‌اند، نشان دهید $u = f(x)g(y)$ جواب معادله $uu_{xy} - u_x u_y = 0$ است.

۵. جواب عمومی معادله $u_{yy} + u = x^2 \sin xy$ را به دست آورید.

۶. جواب عمومی معادله $u_{xy} + u_x = xyu_x^2$ را به دست آورید.

۷. فرض کنید $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. مقدار λ را طوری تعیین کنید تا $u(x, y) = f(\lambda x + y)$ جواب معادله $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ گردد.

۸. جواب عمومی معادله با شرایط مرزی زیر را به دست آورید.

$u_{tt} - 2u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$

$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0.$

۹. جواب عمومی معادله با شرایط مرزی زیر را به دست آورید.

$$u_t - 4u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

۱۰. جواب عمومی معادله با شرایط مرزی زیر را تعیین کنید.

$$u_{tt} + 16u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0,$$

$$u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(\pi, t) = 0.$$

۱۱. جواب عمومی معادله با شرایط مرزی زیر را تعیین کنید.

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad 0 < z < r, \quad 0 < t$$

$$u_x(0, y, z, t) = 0, \quad u_x(p, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, 0, z, t) = 0, \quad u_y(x, q, z, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0, t) = 0, \quad u(x, y, r, t) = 0.$$