

۱- جواب معادله زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 & r < 1 \\ u(1, \theta) &= |\theta - \pi| & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

۲- معادله حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + xyt & 0 < x, y < 1, 0 < t \\ u(0, y, t) &= (1-t)y, & u_x(1, y, t) &= 1 \\ u_y(x, 0, t) &= tx + 1, & u(x, 1, t) &= t + x + 1 \\ u(x, y, 0) &= x + y \end{aligned}$$

۳- توضیح دهید که با کدام یک از تبدیلات فوریه، فوریه سینوسی، فوریه کسینوسی و لاپلاس می‌توان برای معادله زیر یک جواب پیدا کرد. سپس به کمک یکی از آنها جواب مورد نظر را به دست آورید. (راهنمایی: تبدیل نسبت به هر دو متغیر می‌تواند اعمال شود.)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u + e^{-t-x}, & -\infty < x < \infty, 0 < t \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

۵- جواب معادله با شرایط مرزی زیر را به وسیله توابع $u_n(x) = x^n(1-x)$ تا سه جمله تقریب بزنید.

$$\begin{aligned} (xy')' + y &= x, & 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, & y(1) &= 1 \end{aligned}$$

۵- ذره‌ای روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ از نقطه $(1, 0, 0)$ تا $(-1, 0, 0)$ را در ۱۰ ثانیه طی می‌کند. برای اینکه انرژی جنبشی این ذره در مسیر حرکت می‌نیم باشد، چه مسیری را باید طی کند؟