

به نام او

وقت: ۱۵۰ دقیقه

امتحان پایان ترم درس ریاضیات پیشرفته - ترم اول ۸۵

۱- جواب معادله زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} & 0 < x, t \\u(x, 0) &= e^{-x} & u(0, t) = t \\u_t(x, 0) &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0\end{aligned}$$

۲- تابع گرین عملگر لاپلاس را در ناحیه  $0 \leq y \leq 1, -\pi \leq x \leq \pi$  به دست آورید. سپس با استفاده از آن مسأله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}\Delta u &= x^2 + y^2 & 0 \leq y \leq 1, -\pi \leq x \leq \pi \\u(-\pi, y) &= y, & u(\pi, y) = 1 \\u(x, 0) &= x, & u(x, 1) = -x\end{aligned}$$

۳- با محاسبه نشان دهید بردارهای ویژه ماتریس  $A$  متعامد هستند، سپس درایه‌های ماتریس  $A^{1000}$  را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۴- فرم جردن ماتریسهای زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۵- ذره‌ای روی کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  از نقطه  $(1, 0, 0)$  تا  $(-1, 0, 0)$  را در  $10^\circ$  ثانیه طی می‌کند. مسیر حرکت این ذره را به دست آورید به شرط آنکه مقدار انتگرال انرژی جنبشی در طول آن مسیر می‌نیمم باشد.