آنالیز فوریه

جلسه بیست وسوم

۲۵،۲،۰۰

ادامه اثبات قضیه دیریکله

- تعریف لگاریتم $L(s,\chi)$:

با درنظر گرفتن یک شاخه لگاریتم، مثلاً $\theta < \operatorname{Arg} z < 2\pi+\theta$ ، تضمینی وجود ندارد که $L(s,\chi)$ برای مقادیر s مختلف

در این ناحیه قرار گیرد. لذا تعریف جدیدی از لگاریتم را با به کار می‌بریم :

$$\log L(s,\chi) := -\int_s^{\infty} \frac{L'(t,\chi)}{L(t,\chi)}\,dt , \qquad s>1 \ ,\ \text{غیربدیهی است}\ \chi \tag{1}$$

دقت کنید $L(t,\chi) \neq 0$ برای $1 < t$ ، زیرا

$$L(t,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-t}} , \qquad t>1$$

و بنابر گزاره جلسه قبل، $L(t,\chi)=0$ تنها درصورتی که یکی از عوامل حاصلضرب صفر باشد.

به علاوه بنابر آخرین گزاره جلسه قبل

$$\frac{L'(t,\chi)}{L(t,\chi)} = O(e^{-ct}) \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

بنابراین انتگرال سمت چپ (1) همگرا است و لگاریتم خوش تعریف است.

این تعریفِ لگاریتم در خواص گزاره زیر صدق می‌کند.

گزاره - اگر $1 < s$ ، آنگاه

$$\exp(\log L(s,\chi)) = L(s,\chi)$$

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)$$

که Log در سمت راست لگاریتم شاخه اصلی است که در جلسه قبل تعریف کردیم.

اثبات - از تابع $g(s) = \exp(-\log L(s,\chi))\, L(s,\chi)$ مشتق بگیرید

$$\frac{d}{ds}\log L(s,\chi) = \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \Rightarrow g'(s) = \frac{-L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\exp(-\log L(s,\chi))\, L(s,\chi)$$

$$+ \exp(-\log L(s,\chi))\, L'(s,\chi) = 0$$

بنابراین $g(s)$ برای $s>1$ تابع ثابت است و چون $\lim_{s\to\infty} L(s,\chi) = 1$ پس $\lim_{s\to\infty} g(s) = 1$ و g تابع ثابت یک است.

برای اثبات قسمت دوم از دو طرف تساوی exp بگیرید:

$$L(s,\chi) = \exp(\log L(s,\chi)) \overset{?}{=} \exp\Big(\sum_p \mathrm{Log}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\Big) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = L(s,\chi)$$

در نتیجه باید

$$\log L(s,\chi) - \sum_p \mathrm{Log}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = 2\pi i\, K(s)$$

برای تعدادی صحیح $K(s)$. چون سمت چپ تابع پیوسته است بنابراین $K(s)$ نیز پیوسته است و در نتیجه تعداد آن ثابت است. وقتی $s\to\infty$ تعداد سمت چپ به صفر همگرا است و در نتیجه $K(s)\equiv 0$ تابع ثابت صفر است.

از رابطه دومی که در گزاره قبل اثبات کردیم، خواهیم داشت:

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \operatorname{Log} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O\left(\sum \frac{1}{p^{2s}}\right)$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$$

لذا برای تکمیل اثبات تنها باید نشان دهیم $\log L(1,\chi)$ کران‌دار است و با توجه به اینکه جلسه قبل نشان دادیم $L(1,\chi)$ کران‌دار است، فقط باید نشان دهیم که $L(1,\chi) \neq 0$ وقتی χ غیربدیهی است. اثبات به دو بخش تقسیم می‌شود، حالتی که χ تابع حقیقی است یعنی $\chi(n) = \overline{\chi(n)}$ برای هر n و حالتی که χ مقادیر غیرحقیقی هم می‌گیرد.

حالت اول : شخصیت‌های مختلط

لم ۱- اگر $s>1$ ، آنگاه $\prod_{\chi} L(s,\chi) \geq 1$

حاصلضرب روی همه شخصیت‌ها محاسبه شده است. در واقع این حاصلضرب یک عدد حقیقی است.

اثبات-

$$L(s,\chi) = \prod_{p} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

$$\Rightarrow \quad L(s,\chi) = \exp\left(\sum_{p} \operatorname{Log} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{\chi} L(s,\chi) = \exp\left(\sum_{\chi}\sum_{p} \operatorname{Log} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{\chi}\sum_{p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\chi(p^k)}{p^{sk}}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{p}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\chi} \frac{1}{k} \frac{\chi(p^k)}{p^{sk}}\right)$$

$$(\delta,\chi)=\frac{1}{|\mathbb{Z}_q^*|}\sum_{m\in\mathbb{Z}_q^*}\delta(m)\overline{\chi(m)}=1$$ آنگاه $$\delta(n)=\begin{cases}|\mathbb{Z}_q^*| & n\overset{q}{\equiv}1 \text{ اگر}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$\delta(n)=\sum_{\chi}\chi(n)\qquad \forall n$$

$$\Rightarrow\quad \prod_{\chi}L(s,\chi)=\exp\Big(\underbrace{\sum_{p}\sum_{k}\frac{1}{k}\frac{\delta(p^k)}{p^{sk}}}_{\text{یک عدد حقیقی مثبت}}\Big)\geq 1$$

لم ۲- (i) اگر $L(1,\chi)=0$ آنگاه $L(1,\overline{\chi})=0$.

(ii) اگر χ غیرحقیقی باشد و $L(1,\chi)=0$، آنگاه

$$|L(s,\chi)|\leq c\,|s-1|\qquad \text{for}\quad 1\leq s\leq 2$$

(iii) برای مشخصه‌ی اصلی χ_0 داریم،

$$|L(s,\chi_0)|\leq\frac{c}{|s-1|}$$

اثبات - (ii) از تعریف L-تابع داریم $L(s,\bar{\chi}) = \overline{L(s,\chi)}$ و به وضوح (ii) برقرار است.

(iii) در جلسه پیش دیدیم که وقتی $\chi \neq \chi_0$ غیربدیهی است، $L(s,\chi)$ برای $s>0$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، بنابراین

$$|L(s,\chi)| = |L(s,\chi) - L(1,\chi)| = |L'(s_0,\chi)\cdot(s-1)|$$

برای $1 \le s_0 \le s$. c را کران بالای $L'(s,\chi)$ برای $1 \le s \le 2$ قرار دهید.

(iv)

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \frac{1}{1-\chi_0(p)p^{-s}} = \left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right) \times \prod_{p|q}(1-p^{-s})$$

$$= \zeta(s) \times \underbrace{\prod_{p|q}(1-p^{-s})}_{\text{تعداد متناهی جمله}}$$

در جلسه قبل دیدیم که

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \le 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = 1 + \frac{1}{s-1} \Rightarrow |\zeta(s)| \le \frac{c}{|s-1|}$$

قضیه - اگر χ یک مشخصه غیربدیهی غیرحقیقی باشد، آنگاه $L(1,\chi)\neq 0$.

اثبات - اگر $L(1,\chi)=0$ آنگاه $L(1,\bar{\chi})=0$ و چون $\chi\neq\bar{\chi}$ در نتیجه در حاصلضرب $\prod_{\chi} L(s,\chi)$ وقتی $s\to 1^+$ حداقل دو جمله به صفر میل می‌کند و بنابر لم قبل هر جمله از مرتبه $|s-1|$ است. از طرفی تنها جمله بیکران این حاصلضرب $L(s,\chi_0)$ است که مشابه $\frac{1}{|s-1|}$ رفتار می‌کند. در نتیجه

$$\prod_{\chi} L(s,\chi) = O(s-1) \quad \text{as} \quad s\to 1^+$$

که با لم ۱ تناقض دارد.

حالت دوم : مشخصه‌ها حقیقی

در این حالت χ تنها مقادیر ± 1 را اختیار می‌کند.

ایده اثبات : قرار دهید
$$F(m,n) = \frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}}$$

و

$$S_N := \sum\sum_{mn \leq N} F(m,n)$$

آنگاه به وضوح از قضیه زیر نتیجه می‌شود که $L(1,\chi) \neq 0$.

قضیه - (i) $S_N \geq c \log N$ برای یک ثابت $c>0$.

(ii) $S_N = 2N^{1/2} L(1,\chi) + O(1)$

$$S_N = \sum_{1\le k\le N}\ \sum_{mn=k}\frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}} = \sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k^{1/2}}\sum_{n|k}\chi(n)$$

لم ۳

$$\sum_{n|k}\chi(n) \ge \begin{cases} 0 & \text{for all } k \\ 1 & \text{if } k=l^2 \text{ for some } l\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

اثبات- اگر $k=p^\alpha$، آنگاه

$$\sum_{n|p^\alpha}\chi(n) = \chi(1)+\chi(p)+\dots+\chi(p^\alpha)$$

$$= \chi(1)+\chi(p)+(\chi(p))^2+\dots+(\chi(p))^\alpha$$

چون χ مشخصه حقیقی است و $\chi(p)\in\{0,\pm1\}$ و $\chi(1)=1$. اگر $\chi(p)=1$ مجموع بالا برابر $\alpha+1$ است و
اگر $\chi(p)=-1$ وقتی α زوج است برابر یک و در حالتی که α فرد باشد برابر صفر است. در حالت کلی به کمک رابطه زیر اثبات کامل می‌شود.

$$K=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r} \Rightarrow \sum_{n|K}\chi(n) = \left(1+\chi(p_1)+\dots+(\chi(p_1))^{\alpha_1}\right)\cdots\left(1+\chi(p_r)+\dots+(\chi(p_r))^{\alpha_r}\right)$$

اثبات قضیه، قسمت (ب) $\qquad S_N \geq c \log N$

به کمک لم قبل داریم :

$$S_N = \sum_{1\leq k\leq N} \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{n\mid k} x(n) \geq \sum_{1\leq k=\ell^2\leq N} \frac{1}{\ell}$$

از طرفی

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1)$$

در نتیجه

$$S_N \geq \log(\sqrt{N}+1) \geq \frac{1}{2}\log N$$

لم ۴ برای اعداد صحیح $0<a<b$ داریم:

$$\sum_{n=a}^{b}\frac{\chi(n)}{n^{1/2}}=O(a^{-1/2})$$

$$\sum_{n=a}^{b}\frac{\chi(n)}{n}=O(a^{-1})$$

اثبات_ اگر قرار دهیم $S_n=\sum_{k=1}^{n}\chi(k)$ بنا بر لم حساب قبل می‌دانیم $|S_n|\leq|\mathbb{Z}_q^*|$ برای هر n.

$$\sum_{n=a}^{b}\frac{\chi(n)}{n^{1/2}}=\sum_{n=a}^{b}\frac{S_n-S_{n-1}}{n^{1/2}}=\frac{S_b}{\sqrt{b}}-\frac{S_{a-1}}{\sqrt{a}}+\sum_{n=a}^{b-1}S_n\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$

$$=O(a^{-1/2})+O\left(\sum_{n=a}^{\infty}n^{-3/2}\right)$$

$$\left|\sum_{n=a}^{b-1}S_n\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]\right|\leq c\sum_{n=a}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}\leq c\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\leq\frac{c}{2}\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\leq\frac{c}{2}\int_{a-1}^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}=c\sqrt{a-1}\leq c\,a^{-1/2}$$

لم ۵ ثابت $c>0$ وجود دارد که

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1/2}} = 2N^{1/2} + c + O(N^{-1/2})$$

اثبات -

$$c_n = \frac{1}{n^{1/2}} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow 0 \le c_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{2} n^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

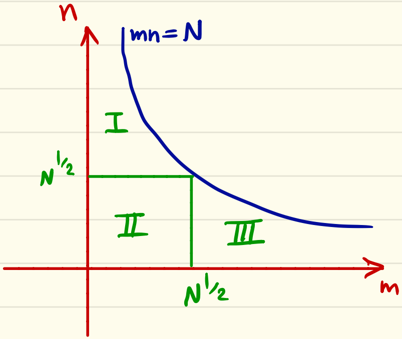
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1/2}} = \int_1^{N+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum_{n=1}^{N} c_n$$

$$= 2\sqrt{N+1} \underbrace{-2 + \gamma}_{c} - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

مشابه آنچه در لم قبل نشان دادیم $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n = O(N^{-1/2})$

اثبات قسمت (ت)

$$S_N = 2N^{1/2} L(1,\chi) + O(1)$$



$$S_N = S_{I} + S_{II} + S_{III}$$

$$S_{I} = \sum_{m < N^{1/2}} \sum_{N^{1/2} < n \leq \frac{N}{m}} \frac{\chi(n)}{(mn)^{1/2}}$$

$$= \sum_{m<N^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\sqrt{N} < n \leq \frac{N}{m}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} = O(N^{-1/4}) \sum_{m<N^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$= O(N^{-1/4}) \left[2N^{1/4} + c + O(N^{-1/4}) \right] = O(1)$$

$$S_{II} + S_{III} = \sum_{1 \le n \le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \left[\sum_{m \le \frac{N}{n}} \frac{1}{m^{1/2}} \right]$$

$$= \sum_{1 \le n \le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \left[2\left(\frac{N}{n}\right)^{1/2} + c + O\left(\left(\frac{n}{N}\right)^{1/2}\right) \right]$$

$$= 2\sqrt{N} \sum_{1 \le n \le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n} + c \sum_{1 \le n \le N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \le n \le N^{1/2}} \chi(n)\right)$$

$$= 2\sqrt{N} \left[L(1,\chi) - \sum_{N^{1/2} < n} \frac{\chi(n)}{n} \right] + O(1)$$

$$= 2\sqrt{N}\, L(1,\chi) + O(1)$$