آنالیز فوریه

جلسه بیست و دوم

۰۰/۲/۲۰

قضیه دیریکله : تعداد اعداد اول به صورت $kq+l$ که $(q,l)=1$ نامتناهی است.

ایده اثبات در حالت خاص اعداد اول $4k+1$:

مشخصه χ روی $\mathbb{Z}_4^*$ را با ضابطه $\chi(1)=1$ و $\chi(3)=-1$ در نظر بگیرید و به صورت زیر به کل اعداد صحیح توسعه دهید:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & n \overset{4}{\equiv} 1 \\ -1 & n \overset{4}{\equiv} -1 \end{cases}$$

به وضوح رابطه ضربی $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ برقرار است. مشابه فرمول اویلر داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{\text{اول } p} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

دقت کنید

$$\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = 1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\cdots$$

و

$$\prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = 1+\sum \frac{\chi(p_1^{\alpha_1})\cdots\chi(p_r^{\alpha_r})}{(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r})^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} =: L(s,\chi)$$

$$L(s,\chi) = 1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots$$

برای هر $s>0$ همگراست و

$$L(1,\chi) = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\log L(s,\chi) = -\sum_p \log(1-\chi(p)p^{-s}) = \sum_p\left[\frac{\chi(p)}{p^s} + O(p^{-2s})\right]$$

وقتی $s \to 1$ سمت چپ کران‌دار است و چون مجموع $\sum_p O(p^{-2s})$ نیز کران‌دار است در نتیجه باید عبارت زیر کران‌دار باشد

$$\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{p \overset{4}{\equiv} 1} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \overset{4}{\equiv} 3} \frac{1}{p^s}$$

در جلسه قبل نشان دادیم

$$\sum_{p} \frac{1}{p^s}$$

وقتی $s \to 1^+$ واگرا است. جمع دو عبارت بالا نتیجه می‌دهد

$$2 \sum_{p \overset{4}{\equiv} 1} \frac{1}{p^s}$$

وقتی $s \to 1^+$ واگرا است و در نتیجه $\sum_{p \overset{4}{\equiv} 1} \frac{1}{p}$ واگرا خواهد بود.

اثبات در حالت کلی :

$\mathbb{Z}_q^*$ گروه ضربی اعدادی که نسبت به q اول هستند. اگر e یک مشخصه روی $\mathbb{Z}_q^*$ باشد، آن را بدین صورت به کل اعداد صحیح توسیع می‌دهیم :

$$\chi(m) = \begin{cases} e(m) & (m,q)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

واضح است که χ یک تابع ضربی روی $\mathbb{Z}$ است. یعنی

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{Z}$$

همچنین تابع δ_l را روی $\mathbb{Z}_q^*$ اینگونه تعریف کنید :

$$\delta_l(m) = \begin{cases} 1 & m \overset{q}{\equiv} l \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به کمک تابع δ_ℓ می توانیم مجموع زیر را محاسبه کنیم

$$\sum_{p \overset{q}{\equiv} \ell} \frac{1}{p^s} = \sum_{p} \frac{\delta_\ell(p)}{p^s} \qquad (1)$$

اگر سری فوریه δ_ℓ را روی $G=\mathbb{Z}_q^*$ بنویسیم، خواهیم داشت :

$$\hat{\delta}_\ell(e) = (\delta_\ell, e) = \frac{1}{|G|} \sum_{m\in G} \delta_\ell(m)\, \overline{e(m)} = \frac{1}{|G|}\, \overline{e(\ell)}$$

$$\delta_\ell(m) = \sum_{e\in \hat{G}} (\delta_\ell, e)\, e(m) = \frac{1}{|G|} \sum_{e\in\hat{G}} \overline{e(\ell)}\, e(m)$$

اگر δ_ℓ را به $\mathbb{Z}$ توسیع دهیم بدین صورت که

$$\delta_\ell(m) = \begin{cases} 1 & m \overset{q}{\equiv} \ell \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آنگاه تساوی بالا به صورت زیر برقرار است.

$$\delta_\ell(m) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(\ell)}\, \chi(m)$$

لذا رابطه (1) را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد :

$$\sum_{p \overset{q}{\equiv} \ell} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{|G|} \sum_{p} \sum_{\chi} \frac{\overline{\chi(\ell)}\, \chi(p)}{p^s} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi} \overline{\chi(\ell)} \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

χ_0 را توسیع شخصیه بدیهی در نظر می‌گیریم. یعنی اگر تابع ثابت یک روی $\mathbb{Z}_q^*$ را به $\mathbb{Z}$ توسیع دهیم، باید

$$\chi_0(m) = \begin{cases} 1 & (m,q)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\sum_{p\equiv l} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{|G|}\sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(l)} \sum \frac{\chi(p)}{p^s}$$

عبارت $\sum \frac{\chi_0(p)}{p^s}$ تنها در تعداد متناهی جمله (عوامل اول q) با سری $\sum_p \frac{1}{p^s}$ تفاوت دارد. در نتیجه وقتی $s\to 1^+$ این جمله واگرا است. بنابراین قضیه زیر اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۱ــ اگر χ یک شخصیه غیر بدیهی باشد، آنگاه مجموع

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$$

وقتی $s\to 1^+$ کران‌دار می‌ماند.

برای اثبات این قضیه به تعمیم فرمول اویلر احتیاج است.

قضیه ۲- اگر $s>1$، آنگاه

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

نکته- اثبات این قضیه دقیقاً مشابه اثبات فرمول اویلر است. تنها دقت کنید چون برد مشخصه χ مجموعه اعداد مختلط است، همگرایی مجموع و حاصلضرب بالا همگی در $\mathbb{C}$ محاسبه شده اند و در اثبات باید به این نکته دقت کرد.

اگر نشان دهیم وقتی χ مشخصه غیربدیهی است $L(1,\chi)$ کران دار و ناصفر است، آنگاه

$$\log L(s,\chi) = -\sum_p \log(1-\chi(p)p^{-s}) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)$$

وقتی $s \to 1^+$ کران دار است و در نتیجه قضیه ۱ اثبات می‌شود. اما همانطور که مشاهده می‌شود در اینجا لگاریتم اعداد مختلط استفاده شده است.

لگاریتم در صفحه مختلط

$$\exp(x+iy) := e^x \cos y + i\, e^x \sin y$$

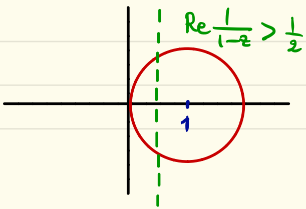
$$\Rightarrow \quad |\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z} \quad , \quad \arg(\exp(z)) = \operatorname{Im} z + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

برای عدد مختلط z، لگاریتم آن، $\log z$، عددی است که

$$\exp(\log z) = z \quad \Rightarrow \quad |z| = e^{\operatorname{Re}(\log z)} \quad , \quad \arg z = \operatorname{Im}(\log z)$$

$$\Rightarrow \quad \log z = \ln|z| + i \arg z$$

از آنجا که $\arg z$ مقادیر مختلفی (همنهشت به پیمانه 2π) می‌تواند داشته باشد، لذا $\log z$ نیز مقادیر مختلفی اتخاذ می‌کند. اگر فرض کنیم $-\pi < \arg z < \pi$ آنگاه این شاخه آرگومان، تابع لگاریتمی را ارائه می‌کند که به آن شاخه اصلی لگاریتم گفته می‌شود و با $\operatorname{Log} z$ نشان می‌دهیم. در این شاخه لگاریتم، $\operatorname{Log}\frac{1}{1-z}$ برای $|z|<1$ تعریف می‌شود و یک تابع تحلیلی است.



$$\operatorname{Log}\frac{1}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \qquad |z|<1$$

مشابه حالت حقیقی، تخمین زیر برقرار است :

- $$\text{Log}\frac{1}{1-z} = z + E(z)$$

که $|E(z)| \le |z|^2$ وقتی $|z| \le \frac{1}{2}$.

گزاره - اگر a_n دنباله از اعداد مختلط باشد که $a_n \neq 1$ برای هر n و $\sum_n |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n}$$

همگرا است.

اثبات - می‌توان فرض کرد که $|a_n| \le \frac{1}{2}$ برای هر n و درنتیجه $\text{Log}\frac{1}{1-a_n}$ در شاخه اصلی تعریف شده است.

$$A_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-a_n} = \exp\left[\sum_{n=1}^{N} \text{Log}\frac{1}{1-a_n}\right]$$

(دقت کنید رابطه $\text{Log}\, A_N = \sum_{n=1}^{N} \text{Log}\frac{1}{1-a_n}$ لزوماً درست نیست. چرا؟) بنابر تخمین بالا داریم

$$\left|\text{Log}\frac{1}{1-a_n}\right| \le |a_n| + |a_n|^2 \le 2|a_n|$$

در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-a_n}$ همگرا است و با توجه به پیوستگی تابع $\exp$ ، حد A_N وجود دارد.

اثبات قضیه ۲ — $s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} ,$$

بنابر گزاره قبل و اینکه $|\chi(p)|=1$ عبارت سمت راست همگرا است. $\left(\sum_p |\chi(p)p^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty \right)$

همچنین با توجه به اینکه $\left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| = \frac{1}{n^s}$ سمت چپ نیز همگرا است.

$$S_N = \sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} \longrightarrow S \qquad \Pi_N = \prod_{p \leq N} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \longrightarrow \Pi$$

$$\Pi_{N,M} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{\chi(p^M)}{p^{Ms}} \right)$$

واضح است که وقتی $M \to \infty$ ، داریم $\Pi_{N,M} \longrightarrow \Pi_N$.

برای $\epsilon > 0$ دلخواه N به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنید که

$$|S_N - S| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^s} < \epsilon \quad , \quad |\Pi_N - \Pi| < \epsilon$$

برای این مقدار N، اگر M به اندازه کافی بزرگ باشد (بزرگترین توان عوامل اول اعداد کوچکتر از N) آنگاه

$$\Pi_{N,M} = \sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} + \text{error}$$

$$|\text{error}| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^s} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |\Pi_{N,M} - S_N| < \epsilon$$

درضمن M را به اندازه کافی بزرگ می‌گیریم تا رابطه

$$|\Pi_{N,M} - \Pi_N| < \epsilon$$

نیز برقرار باشد. درنتیجه

$$|S - \Pi| \leq |S - S_N| + |S_N - \Pi_{N,M}| + |\Pi_{N,M} - \Pi_N| + |\Pi_N - \Pi| < 4\epsilon$$

اکنون برای اثبات قضیه ۱ سه مطلب زیر را باید نشان دهیم:

- $L(s,\chi)$ وقتی χ مشخصه غیربدیهی است، برای $s>0$ پیوسته و در نتیجه $L(1,\chi)$ کران دار است.
- $L(1,\chi)\neq 0$.
- تابع لگاریتم $L(s,\chi)$ خوش تعریف است.

گزاره زیر قسمت اول را اثبات می‌کند.

گزاره - اگر χ مشخصه غیربدیهی باشد، آنگاه سری

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

برای $s>0$ همگرا است. به علاوه:

(الف) تابع $L(s,\chi)$ برای $\infty>s>0$ به طور پیوسته مشتق پذیر است.

(ب) ثابتهای $c,c'>0$ وجود دارند، به طوری که

$$L(s,\chi)=1+O(e^{-cs}) \quad \text{as} \quad s\to\infty$$

$$L'(s,\chi)=O(e^{-c's}) \quad \text{as} \quad s\to\infty$$

برای اثبات از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم - اگر χ یک مشخصه غیربدیهی باشد، آنگاه

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\chi(n)\right| \leq |\mathbb{Z}_q^*| \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

اثبات - ابتدا نشان می‌دهیم

$$S=\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=0$$

$m\in\mathbb{Z}_q^*$ را انتخاب کنید که $\chi(m)\neq 1$.

$$\chi(m)S=\sum_{n\in\mathbb{Z}_q^*}\chi(m)\chi(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_q^*}\chi(mn)$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}_q^*}\chi(n)=S \implies S=0$$

اگر $k=lq+r$ که $0\leq r<q$، آنگاه

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\chi(n)\right|=\left|\sum_{n=0}^{r}\chi(lq+n)\right|=\left|\sum_{n=0}^{r}\chi(n)\right|\leq\sum_{n=0}^{r}|\chi(n)|\leq|\mathbb{Z}_q^*|$$

اثبات گزاره- می‌دانیم که برای $s>1+\epsilon$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ همگرای یکنواخت است و به راحتی می‌توان دید که $L(s,\chi)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است وقتی $s>1$. برای اینکه این مطلب را برای $s>0$ نشان دهیم، قرار دهید

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \chi(n) \quad , \quad S_0 = 0$$

بنابر لم قبل $|S_k| \le |\mathbb{Z}_q^*|$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{S_n\left[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right]}_{:= f_n(s)} + \frac{S_N}{N^s}$$

$$\Rightarrow \quad L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$$

اگر $g(x) = x^{-s}$، آنگاه

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = -g'(\alpha) = +s\,\alpha^{-s-1}$$

برای یک مقدار $n \le \alpha \le n+1$

$$\Rightarrow \quad |f_n(s)| \le \frac{s\,|\mathbb{Z}_q^*|}{n^{s+1}} \qquad \forall\, 0<s$$

بنابر آزمون وایراشتراس، برای $s>\epsilon>0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ همگرای یکنواخت است. در نتیجه $L(s,\chi)$ برای $s>0$ پیوسته است.

برای مشتق‌پذیری $L(s,\chi)$ باید نشان دهیم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s)$$

همگرای یکنواخت است.

$$f_n'(s) = S_n\left[-(\log n)\,n^{-s} + (\log(n+1))(n+1)^{-s}\right]$$

حال قرار دهید $h(x)=(\log x)x^{-s}$ که $h'(x) = x^{-s-1}(1-s\log x)$

$$h(n+1)-h(n) = h'(\beta) \qquad n\le\beta\le n+1$$

به ازای یک مقدار ثابت s_0، برای $s_0 \le s$ داریم

$$|f_n'(s)| \le |Z_q^*|\cdot|1-s\log\beta|\cdot|\beta^{-s-1}| \le \frac{c\log(n+1)}{n^{s+1}}$$

و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s)$ برای $s_0 \le s$ همگرای یکنواخت است و در نتیجه $L(s,\chi)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر. چون s_0 دلخواه است، بنابراین $L(s,\chi)$ برای $s>0$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

اثبات قسمت (ii)

$$|L(s,\chi)-1| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} \leq 2^{-s}\,O(1) = O(e^{-s\log 2})$$

برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ s

$$\left(n^{-s} \leq c\, 2^{-s}\cdot n^{-s/2}\right)$$

به طور مشابه داریم :

$$|L'(s,\chi)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} -\log n \cdot \frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^s} \leq 2^{-s}\,O(1)$$