آنالیز فوریه

جلسه بیست و یکم

۰۲/۰۲/۱۸

آنالیز فوریه روی گروههای آبلی متناهی

G : یک گروه آبلی متناهی

V : مجموعه همه توابع $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ همراه با ضرب داخلی $(f,g) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a)\overline{g(a)}$

$\hat{G}$: دوگان G، مجموعه همه مشخصه‌ای روی G یعنی توابع $e: G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\forall a,b \in G \qquad e(a \cdot b) = e(a)e(b) \qquad |e(a)| = 1$$

در جلسه قبل دیدیم که $\hat{G}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

قضیه - $\hat{G}$ یک پایه متعامد یکه برای V است.

نکته - به کمک قضیه‌ی نمایش گروه‌های آبلی متناهی می‌توان اثبات ساده‌ای برای این قضیه ارائه کرد. در حقیقت می‌دانیم G یکریخت با حاصلضرب

گروه‌های $\mathbb{Z}_k$ است و چون $\hat{\mathbb{Z}}_k \cong \mathbb{Z}_k$ در نتیجه $\hat{G} \cong G$ و $|\hat{G}| = |G|$.

چون $\dim V = |G|$ بنابراین از استقلال خطی اعضای $\hat{G}$ (متعامد یکه بودن) (استقلال خطی را نتیجه می‌دهد) نتیجه می‌شود که $\hat{G}$ یک پایه است .

در اینجا اثبات متفاوتی مستقل از قضیه نمایش گروه‌ها ارائه می‌کنیم .

برای اثبات از قضیه‌ی طیفی در جبر خطی استفاده می‌کنیم. اگر V یک فضای برداری ضرب داخلی باشد، عملگر $T: V \longrightarrow V$

را یکانی گوییم، هرگاه $\forall v, w \in V \qquad (Tv, Tw) = (v, w)$

قضیه طیفی: اگر $\dim V = d$ و $T: V \longrightarrow V$ عملگر یکانی، آنگاه T نمایش قطری دارد. در واقع پایه (متعامد یکه)

$\{v_1, \ldots, v_d\}$ از بردارهای ویژه T وجود دارد که $T(v_i) = \lambda_i v_i$

درحقیقت تعمیم زیرِ از قضیهٔ طیفی را برای اثبات احتیاج داریم:

قضیه ـ فرض کنید $\{T_1, \dots, T_k\}$ خانواده ای از عملگرهای یکانی روی فضای برداری ضرب داخلی با بعد متناهی باشند که

دو بدو باهم جابجا می شوند، یعنی

$$T_i T_j = T_j T_i \qquad 1 \le i, j \le k$$

دراین صورت T_i ها همزمان قطری شدنی هستند یعنی یک پایهٔ (متعامد یکه) برای V وجود دارد که شامل بردارهای ویژهٔ هر T_i است.

اکنون نشان می دهیم که $\hat{G}$ یک پایه برای V است.

اثبات ـ برای هر $a \in G$ تبدیل خطی زیر را روی V در نظر بگیرید:

$$T_a : V \longrightarrow V, \qquad T_a(f)(x) := f(a \cdot x) \quad \forall x \in G$$

چون G یک گروه آبلی است، به راحتی می توان دید که خانواده عملگرهای $\{T_a\}$ دو بدو باهم جابجا می شوند.

$$T_a(T_b(f))(x) = f(b\cdot a\cdot x) = T_b(T_a(f))(x) \qquad \forall a,b\in G$$

به‌علاوه هر T_a یک عملگر یکانی است.

$$(T_a(f), T_a(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} T_a(f)(x)\,\overline{T_a(g)(x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(a\cdot x)\,\overline{g(a\cdot x)}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G} f(y)\,\overline{g(y)} = (f,g)$$

بنابر قضیه طیفی خانواده $\{T_a\}_{a\in G}$ همزمان قطری می‌شوند. فرض کنید $\{f_b\}_{b\in G}$ پایه V باشد که هر f_b بردار ویژه $\{T_a\}$ است.

$$T_a(f_b) = \lambda_a^b\, f_b \;\Rightarrow\; f_b(a\cdot x) = \lambda_a^b\, f_b(x) \qquad \forall a,b,x\in G \qquad (*)$$

اگر 1 عضو خنثای G باشد، باید داشته باشیم $f_b(1)\neq 0$ وگرنه اگر در رابطه بالا قرار دهید $x=1$ ، نتیجه خواهد شد $f_b(a)=0$ برای

هر $a\in G$. یعنی $f_b \equiv 0$ تابع ثابت صفر است که با عضو پایه بودن در تناقض است .

اکنون ادعا می‌کنیم $g_b(x) = \dfrac{f_b(x)}{f_b(1)}$ یک شخصیت روی G است .

$$g_b(a\cdot x) = \frac{f_b(a\cdot x)}{f_b(1)} \underset{(*)}{=} \frac{\lambda_a^b f_b(x)}{f_b(1)} \underset{\text{در } (*) \text{ قرار دهید } x=1}{=} \frac{f_b(a)}{f_b(1)} \cdot \frac{f_b(x)}{f_b(1)} = g_b(a)\cdot g_b(x)$$

از طرفی $g_b(a) \neq 0$ برای هر $a\in G$ وگرنه $g_b \equiv 0$ تابع ثابت صفر است که متناقض است با اینکه f_b عضو پایه است.

بنابر لمی که در جلسه پیش ثابت کردیم باید $g_b \in \hat{G}$. درنتیجه $\hat{G}$ فضای V را تولید می‌کند و یک پایه متعامد یکه برای آن است .

سری فوریهٔ متناهی :

$$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

از آنجا که $\hat{G}$ پایه‌ی متعامد یکه برای V است داریم :

$$f(x) = \sum_{e \in \hat{G}} (f, e)\, e(x)$$

و بدین ترتیب تبدیل فوریهٔ آن به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\hat{f}: \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\hat{f}(e) = (f, e) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\, \overline{e(x)}$$

و رابطه پارسوال به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \|f\|^2 = \sum_{e \in \hat{G}} |\hat{f}(e)|^2$$

مثال- $\sum_{e\in\hat{G}} e(x)=0 \qquad \forall x\in G,\quad x\neq 1$

اگر $f=\sum_{e\in\hat{G}} e$ آنگاه $\hat{f}\equiv 1$ تابع ثابت یک است. $\left(\hat{f}(e)=1, \forall e\in\hat{G}\right)$

از طرفی اگر $\delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ |G| & x=1\end{cases}$ آنگاه

$$\hat{\delta}(e)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\delta(x)\overline{e(x)}=\frac{1}{|G|}\delta(1)\overline{e(1)}=1$$

قضیه دیریکله : تعداد اعداد اول به صورت $kq + \ell$ که $(q,\ell)=1$ نامتناهی است.

حالت خاص $q=1$: تعداد اعداد اول نامتناهی است.

اثبات ـ اگر $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ مجموعه همه اعداد اول باشد، عدد $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ عامل اولی دارد که در $\mathcal{P}$ نیست. $\times$

حالت خاص : تعداد اعداد اول به صورت $2k+1$ نامتناهی است که نتیجه حالت قبلی است.

حالت خاص : تعداد اعداد اول به صورت $3k+2$ نامتناهی است.

اثبات ـ اگر همه اعداد اول به صورت $3k+2$ در مجموعه $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ وارد داشته باشند، آنگاه $N = 3p_1 p_2 \cdots p_n + 2$

عامل اولی به غیر از اعضای $\mathcal{P}$ دارد که به صورت $3k+2$ است. (دقت کنید اگر همه عوامل اول N، به صورت $3k+1$ باشند، باید $N \overset{3}{\equiv} 1$)

حالت خاص : تعداد اعداد اول به صورت $3k+1$ نامتناهی است.

حالت خاص: تعداد اعداد اول به صورت $4k+3$ نامتناهی است.

اثبات - مشابه حالت خاص $3k+2$.

نکته - ایده قبل برای اعداد اول به صورت $4k+1$ کار نمی‌کند.

ایده اصلی اثبات قضیه دیریکله :

$$\mathcal{P} = \{p \text{ عدد اول است} : p = kq + \ell ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

نشان می‌دهیم $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ واگرا است.

ابتدا به عنوان حالت خاص

گزاره - $\displaystyle\sum_{p \text{ عدد اول است}} \frac{1}{p}$ واگرا است.

تابع زتا :
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s>1$$

به ازای هر $s>1$ سری بالا همگراست. درحقیقت برای هر $\epsilon>0$ ، این سری برای $s>1+\epsilon$ همگرای یکنواخت است. درنتیجه تابع ζ پیوسته است.

به علاوه تقریب زیر را داریم :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s} = 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

قضیه زیر نقش کلیدی در اثبات دارد.

قضیه - برای هر $s>1$ ، داریم :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \text{(فرمول اویلر)}$$

نکته - اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، حاصلضرب آنها را در صورتی که حد زیر وجود داشته باشد، بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} A_n$$

درحالتی که A_n ها مثبت باشند، این همگرایی معادل همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \log A_n$ است.

گزاره - اگر $A_n = 1 + a_n$ و $\sum_n |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه حاصلضرب $\prod_n A_n$ همگرا است و این حاصلضرب صفر می‌شود اگر و تنها اگر یکی از عوامل A_n صفر شود. همچنین اگر $a_n \neq 1$ برای هر n، آنگاه $\prod_n \frac{1}{1-a_n}$ همگرا است.

اثبات - از همگرایی $\sum_n |a_n|$ می‌توان نتیجه گرفت $|a_n| < \frac{1}{2}$ برای مقادیر بزرگ n. چون تعداد متناهی جمله اول در نتیجه همگرایی تأثیر ندارد فرض می‌کنیم برای همه مقادیر n داریم $|a_n| < \frac{1}{2}$ و از تقریب زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\log A_n| = |\log(1 + a_n)| = \left| a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots \right|$$

$$\leq |a_n| + \frac{|a_n|^2}{2} \left[1 + |a_n| + |a_n|^2 + \cdots \right] \leq 2|a_n|$$

حاصلضرب $\prod_n A_n$ صفر است هرگاه $\sum \log A_n = -\infty$. بنابر مطلب بالا برای حالاتی که $|a_n| < \frac{1}{2}$ این اتفاق نمی‌افتد. لذا حاصلضرب $\prod_{n \geq N} A_n$ از آن جمله به بعد ناصفر است. بنابراین $\prod_n A_n$ تنها وقتی صفر است که $\prod_{n=1}^{N} A_n = 0$.

قسمت آخر هم به راحتی از قسمت قبل با در نظر گرفتن تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\prod_n \frac{1}{1-a_n} = \frac{1}{\prod_n (1-a_n)}$$

نتیجه - $\prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ برای $s>1$ همگراست.

اثبات - بنابر گزاره قبل تنها کافی است $\sum_{p \text{ اول}} p^{-s}$ همگرا باشد.

$$\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$$

اثبات فرمول اویلر:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ اول}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

ایده اثبات -

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right) = 1+\sum_p \frac{1}{p^s}+\sum_{p_i \neq p_j} \frac{1}{p_i^s p_j^s}+\cdots+\frac{1}{(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r})^s}+\cdots$$

برای عدد ثابت $N>0$ ، M را بزرگترین توانی بگیرید که در تجزیه اعداد کوچکتر از N به اعداد اول ظاهر می‌شود. یعنی اگر

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

تجزیه n به اعداد اول باشد، وقتی $n \le N$ می‌دانیم $\alpha_i \le M$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \le \prod_{p\le N} \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right)$$

$$\le \prod_{p\le N} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

وقتی $N\to\infty$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \le \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

برعکس

$$\prod_{p\le N} \left(1+\frac{1}{p^s}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

عبارت حاصلضرب سمت چپ به صورت مجموع $(M+1)^N$ جمله به صورت $\dfrac{1}{(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r})^s}$ خواهد بود که هیچکدام از این جملات تکراری نیستند.

قضیه تجزیه اعداد صحیح به اعداد اول نشان می‌دهد که شامل تعداد $(M+1)^N$ جمله از مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ است. اکنون اگر $M \to \infty$

داریم:

$$\prod_{p \le N} \frac{1}{1-p^{-s}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

اکنون اگر $N \to \infty$ اثبات کامل خواهد شد.

قضیه - سری $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ واگرا است.

اثبات -

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p \text{ اول}} \log(1-p^{-s})$$

به کمک تقریب $\log(1+x) = x + O(|x|^2)$ برای $|x| \le \frac{1}{2}$ خواهیم داشت

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} - \sum_p O(p^{-2s}) \underset{s>1}{\le} \sum_p \frac{1}{p} + \underbrace{c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{کران دار}}$$

اما وقتی $s \to 1^+$ تابع زتا بی‌کران می‌شود و در نتیجه باید سری $\sum \frac{1}{p}$ واگرا باشد.

برای هر M دلخواه:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ge \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^s} \Rightarrow \liminf_{s \to 1^+} \zeta(s) \ge \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n}$$