آنالیز فوریه

جلسه بیستم

۱۴۰۲/۱۲/۱۳

آنالیز فوریه متناهی

توسعه تناوبی تابع $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید و سری فوریه متناظر آن را با

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$$

نشان دهید. برای محاسبه ضریب فوریه به صورت عددی تقریب انتگرال زیر را باید محاسبه کنیم:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{nk}{N}}$$

برای این تقریب مقادیر $\{f(0), f(\frac{1}{N}), \dots, f(\frac{N-1}{N})\}$ مهم هستند. این ایده تبدیل فوریه روی گروه‌های متناهی است.

$\mathbb{Z}_N$: گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه N.

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

متناظر تابع $f: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ و با الهام از مطلب صفحه قبل، سری فوریه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-2\pi i k n/N}$$

و البته انتظار داریم به کمک ضرایب فوریه $\hat{f}(n)$، تابع f بازیابی شود.

V را فضای برداری همه توابع $f: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ در نظر بگیرید. V یک فضای برداری N بعدی روی $\mathbb{C}$ است.

یک پایه طبیعی برای این فضا، مجموعه توابع

$$\{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$$

است که $g_n(k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$.

روی فضای V می‌توان ضرب داخلی زیر را تعریف کرد:

$$(f,g) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\,\overline{g(k)}$$

و متناظر آن نرم زیر به دست می‌آید:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2}$$

گزاره - مجموعه توابع $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ یک پایه متعامد یکه برای V است که $e_n(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\omega^{nk}$

و $\omega = e^{2\pi i/N}$ ریشه N-ام واحد است.

اثبات -

$$(e_n, e_m) = \sum_{k=0}^{N-1} e_n(k)\,\overline{e_m(k)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{nk}\,\overline{\omega}^{mk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(n-m)k} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

نتیجه - برای هر تابع $f: \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ داریم

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} (f, e_n)\, e_n$$

و

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |(f, e_n)|^2 \qquad \text{(رابطه پارسوال)}$$

نکته - تساوی بالا فرمول تبدیل وارون فوریه است چرا که

$$(f, e_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, \overline{e_n(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, \omega^{-nk} = \sqrt{N}\, \hat{f}(n)$$

$$\Rightarrow \quad f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{N}\, \hat{f}(n)\, e_n(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n)\, \omega^{nk}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}(n)|^2$$

Fast Fourier Transform (FFT) تبدیلِ فوریهِ سریع

همانطور که در اسلایدِ اول دیدیم برای محاسبه تبدیلِ فوریهِ تابع $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ابتدا آن را به صورت تابعی روی $\mathbb{Z}_N$ تعریف می‌زنیم

$$F(k) = f(\tfrac{k}{N}) \quad , \quad F: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$$

تبدیلِ فوریهِ F تقریبِ ضرایبِ فوریهِ f خواهند بود.

$$\hat{f}(n) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\tfrac{k}{N}) e^{-2\pi i kn/N} = \hat{F}(n)$$

دقت کنید $\hat{F}(n+N) = \hat{F}(n)$ و $\hat{F}: \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ خوش تعریف است. به کمک $\hat{F}$ تابع F و در نتیجه مقادیرِ $f(\frac{k}{N})$ قابل بازسازی است.

FFT یکِ الگوریتم کارا برای محاسبه ضرایب فوریهِ تابع F است. در یکِ نکته ابتدایی به محاسبه ضرایب فوریه، با داشتن $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$ و $\omega = e^{-2\pi i/N}$ برای محاسبه $\hat{F}$ بایدِ ابتدا ω^{kn} را برای هم $0 \leq k \leq N-1$ و $0 \leq n \leq N-1$ محاسبه شود.

چون $\bar{\omega}^{kn} \in \{1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots, \bar{\omega}^{N-1}\}$ لذا همه مقادیر $\bar{\omega}^{kn}$ با N ضرب به دست می‌آید.

اما برای محاسبه

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\, \bar{\omega}^{kn}$$

با دانستن $\bar{\omega}^{kn}$ و $F(k)$ به N ضرب ، $N-1$ جمع و یک تقسیم احتیاج است. لذا $\hat{F}(n)$ با $2N$ محاسبه قابل انجام است.

و درنتیجه برای تابع $\hat{F}$ (همه ضرایب فوریه) $2N^2 + N$ محاسبه لازم است و پیچیدگی محاسبه این الگوریتم $O(N^2)$ است.

الگوریتم FFT این پیچیدگی را به $O(N \log N)$ کاهش می‌دهد.

قضیه ـ اگر $N = 2^n$ ، می‌توان ضرایب فوریه یک تابع روی $\mathbb{Z}_N$ را با حداکثر

$$4 \times 2^n n = 4 N \log_2 N$$

عملیات جبری به دست آورد.

$\#(N)$ حداقل تعداد عملیات جبری لازم برای محاسبه ضرایب فوریه یک تابع روی $\mathbb{Z}_N$.

لم - $\#(2N) \leq 2\#(N) + 8N$

اثبات قضیه - قرار دهید $\alpha_n = \#(2^n)$ و با استقراء نشان می دهیم $\alpha_n \leq 2^{n+2} n$.

برای $n=1$ یا $N=2$ تنها دو ضریب فوریه

$$\hat{F}(0) = \frac{1}{2}(F(0) + F(1)) \quad , \quad \hat{F}(1) = \frac{1}{2}(F(0) - F(1))$$

با کمتر از ۵ عمل جبری قابل محاسبه است. اگر برای n $\alpha_n \leq 2^{n+2} n$ بنابر لم بالا داریم

$$\alpha_{n+1} \leq 2\alpha_n + 2^{n+3}$$

و در نتیجه قضیه برای $n+1$ نیز درست است:

$$\alpha_{n+1} \leq 2^{n+3} n + 2^{n+3} = 2^{n+3}(n+1)$$

اثبات لم - $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ و $\omega_{2N} = e^{-2\pi i/2N}$.

تابع $F : \mathbb{Z}_{2N} \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. ضرایب فوریه F را به کمک ضرایب فوریه دو تابع زیر محاسبه می کنیم.

$$F_0 , F_1 : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$F_0(k) = F(2k) \quad , \quad F_1(k) = F(2k+1)$$

در واقع نشان می دهیم

$$(*) \qquad \hat{F}(m) = \frac{1}{2}\left(\hat{F}_0(m) + \hat{F}_1(m)\, \omega_{2N}^m \right)$$

برای محاسبه ضرایب فوریه F_0 و F_1 هر کدام حداکثر $\#(N)$ عملیات لازم است و ضرایب ω_{2N}^m برای $1 \le m \le 2N$ با حداکثر $2N$ عملیات به دست می آید. با دانستن $\hat{F}_0(m)$، $\hat{F}_1(m)$ و ω_{2N}^m سه عمل جبری لازم است که $\hat{F}(m)$ محاسبه شود و در مجموع $6N$.

در نتیجه

$$\#(2N) \le 2\,\#(N) + 2N + 6N$$

اکنون رابطه (*) را اثبات می‌کنیم:

$$\hat{F}(m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} F(k)\, \omega_{2N}^{km}$$

$$= \frac{1}{2N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} F(2k)\, \omega_{2N}^{2km} + \sum_{k=0}^{N-1} F(2k+1)\, \omega_{2N}^{(2k+1)m} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_0(k)\, \omega_N^{km} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_1(k)\, \omega_N^{km} \cdot \omega_{2N}^{m} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{F}_0(m) + \hat{F}_1(m)\, \omega_{2N}^{m} \right]$$

آنالیز فوریه روی گروههای آبلی متناهی

G : یک گروه آبلی متناهی

V : مجموعه همه توابع $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ که یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است و $\dim V = |G|$

مشابه $\mathbb{Z}_N$ ضرب داخلی زیر روی V تعریف می شود :

$$(f,g) = \frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} f(a)\,\overline{g(a)}$$

که نرم زیر را القا می کند

$$\|f\| = \left[\frac{1}{|G|} \sum_{a\in G} |f(a)|^2 \right]^{1/2}$$

تعریف- هر تابع $e: G \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ را یکِ مشخصه (character) روی G گوییم، هرگاه

$$\forall a,b \in G \qquad \underbrace{e(a.b)}_{\text{عمل گروه}} = \underbrace{e(a)e(b)}_{\text{ضرب در } \mathbb{C}}$$

مجموعه همه مشخصه‌های روی G را با $\hat{G}$ نشان می‌دهیم و آن را دوگان گروه G می‌نامیم.

مثال- توابع $e_n : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه

$$e_n(k) = e^{2\pi i k n/N}$$

مشخصه هستند. واضح است که رابطه $e_n(k+m) = e_n(k)e_n(m)$ برای هر $k,m \in \mathbb{Z}_N$ برقرار است.

گزاره- اگر $e: G \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ در خاصیتِ ضربی $e(a.b) = e(a)e(b)$ صدق کند، آنگاه e یکِ مشخصه است.

اثبات- تنها باید نشان دهیم $|e(a)|=1$ برای هر $a \in G$. واضح است که اگر 1 عضو خنثی G باشد باید $e(1) = (e(1))^2$

در نتیجه $e(1)=1$ و برای هر عضو دلخواه a اگر $n=|G|$ داریم $a^n = 1$ و $(e(a))^n = 1 \Leftarrow |e(a)| = 1$.

گزاره – مجموعهٔ مشخص‌های $\hat{G}$ با عمل زیر یک گروه آبلی است.

$$(e_1 \cdot e_2)(a) = e_1(a)\, e_2(a) \qquad \forall a \in G$$

مثال – $\hat{\mathbb{Z}}_N$ دوگان $\mathbb{Z}_N$ یکریخت با $\mathbb{Z}_N$ است.

$$(e_n \cdot e_m)(k) = e_n(k)\, e_m(k) = e_{m+n}(k)$$

درنتیجه تابع $n \longmapsto e_n$ یک یکریختی بین $\hat{\mathbb{Z}}_N$ و $\mathbb{Z}_N$ است.

مثال – $\mathbb{Z}_q^*$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}_q$ که اعضایش نسبت به q اول هستند. این مجموعه با عمل ضرب یک گروه آبلی است.

مثلاً $\mathbb{Z}_4^* = \{1, 3\}$ یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ است.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ 1 & \longrightarrow & 0 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

یا $\mathbb{Z}_5^* = \{1,2,3,4\}$ یکریخت با $\mathbb{Z}_4$ است.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_5^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 \\
1 & \longrightarrow & 0 \\
2 & \longrightarrow & 1 \\
3 & \longrightarrow & 3 \\
4 & \longrightarrow & 2
\end{array}
$$

همچنین $\mathbb{Z}_8^* = \{1,3,5,7\}$ یکریخت با گروه جمعی $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ است.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_8^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \\
1 & \longrightarrow & (0,0) \\
3 & \longrightarrow & (1,0) \\
5 & \longrightarrow & (0,1) \\
7 & \longrightarrow & (1,1)
\end{array}
$$

اگر تابع $\chi : \mathbb{Z}_4^* \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ یک مشخصه باشد باید $\chi(1) = \chi(1)^2 = (\chi(3))^2$

$$\Rightarrow \quad \chi(1) = 1 \quad , \quad \chi(3) = \pm 1$$

درنتیجه گروه دوگانی $\hat{\mathbb{Z}}_4^*$ دوعضوی است و یکریخت با $\mathbb{Z}_4^*$.

بطور مشابه اگر e یک مشخصه روی $\mathbb{Z}_8^*$ باشد، باید $e(1) = 1$ ، $e(3), e(5) \in \{\pm 1\}$ و $e(7) = e(3)e(5)$

همینطور چون $\mathbb{Z}_5^*$ یکریخت با $\mathbb{Z}_4$ است، گروه دوگانی $\hat{\mathbb{Z}}_5^*$ نیز یکریخت با $\hat{\mathbb{Z}}_4$ $\cong \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_5^*$ است. اگر $\eta \in \hat{\mathbb{Z}}_5^*$ باید

$$\eta(1) = 1 \;,\; \eta(2)^4 = 1 \;,\; \eta(3) = \eta(2)^3 \;,\; \eta(4) = \eta(2)^2$$

و با انتخاب $\eta(2) \in \{1, e^{2\pi i/4}, e^{\pi i}, e^{3\pi i/4}\}$ تابع η به طور یکتا تعیین می‌شود.

هدف : $\hat{G}$ یک پایه متعامدیکه برای V است و درنتیجه باید $|G| = |\hat{G}|$.

$$\|e\|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}|e(a)|^2 = 1 \quad \Leftarrow \quad |e(a)| = 1$$

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} e_1(a)\overline{e_2(a)} = 0 \;? \qquad \forall\, e_1 \neq e_2 \in \hat{G}$$

لم - اگر e یک مشخصه غیربدیهی روی گروه G است، آنگاه $\sum_{a\in G} e(a) = 0$.

(مشخصه بدیهی تابع ثابت یک است که عضو خنثی گروه $\hat{G}$ است.)

اثبات - چون e غیربدیهی است، $b\in G$ وجود دارد که $e(b)\neq 1$.

$$e(b)\sum_{a\in G} e(a) = \sum_{a\in G} e(b.a) = \sum_{a\in G} e(a)$$

وقتی a روی G می‌چرخد، $b.a$ نیز کل G را می‌گیرد و تساوی آخر برقرار است. $\Leftarrow \sum_{a\in G} e(a) = 0$

نتیجه - اگر $e_1 \neq e_2 \in \hat{G}$ آنگاه $(e_1, e_2) = 0$.

اثبات - چون $|e_2(a)| = 1$ پس $\overline{e_2(a)} = e_2(a)^{-1}$ و

$$a \longmapsto e_1(a)\overline{e_2(a)} = e_1(a)\, e_2(a)^{-1} = (e_1 \cdot e_2^{-1})(a)$$

یک مشخصه غیربدیهی روی G است و بنابر لم قبل

$$\sum_{a \in G} e_1(a)\overline{e_2(a)} = 0$$