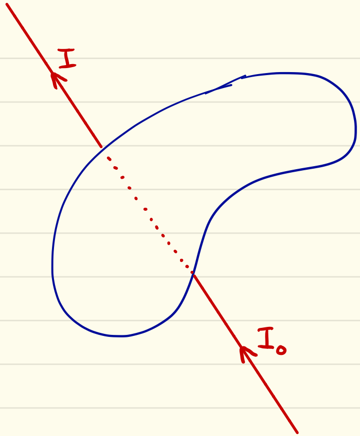
آنالیز فوریه

جلسه نوزدهم

۰۰/۲/۱۱

تبدیل رادون



اگر اشعه x به جسمی تابیده شود، شدت (intensity) آن پس از خروج از جسم کاهش پیدا می‌کند. اگر این جسم، همگن باشد و در همه نقاط اثر کاهشی یکسانی بر شدت اشعه داشته باشد، آنگاه

$$I = I_0 e^{-d\rho}$$

$I_0 =$ شدت اشعه ورودی

$I =$ شدت اشعه خروجی

$d =$ فاصله طی شده در داخل جسم

$\rho =$ ضریب کاهش که به مواد تشکیل دهنده جسم وابسته است.

اگر جسم همگن نباشد، مثلاً از دو لایه با ضخامت‌های d_1 و d_2 و ضرایب کاهشی ρ_1 و ρ_2 باشد، آنگاه

$$I = I_0 e^{-d_1\rho_1 - d_2\rho_2}$$

در نتیجه می‌توان ادعا کرد که برای یک جسم دلخواه فرمول کاهش شدت اشعه X از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = I_0 e^{-\int_L \rho}$$

که در اینجا ρ یک تابع است در هر نقطه جسم ضریب کاهشی شار در آن نقطه را نشان می‌دهد و L خطی است که اشعه در امتداد آن حرکت کرده است.

سؤال اصلی در اینجا که پاسخش در عکس‌برداری پزشکی کاربرد دارد، این است که اگر بتوانیم تغییر شدت یک اشعه پس از عبور از یک جسم در مسیرهای مختلف را به دست آوریم، آیا می‌توانیم نوع بافت را تشخیص داد. برای هر خط L اگر I_0 و I را اندازه بگیریم، در نتیجه $\int_L \rho$ را خواهیم داشت. به دنبال راه حلی هستیم که با دانستن مقدار این انتگرال‌ها، بتوانیم تابع ρ را پیدا کنیم.

تبدیل رادون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho \longmapsto R(\rho)$$

$$R(\rho) : \{\text{همه خطوط صفحه}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$R(\rho)(L) = \int_L \rho$$

به زبان ریاضی مسأله اینگونه طرح می‌شود که با دانستن تابع $R(\rho)$ مقدار ρ را بدست آورید. به عبارتی آیا فرمولی برای عملگر وارون R وجود دارد؟

در یک گام عقب‌تر باید ابتدا پرسید که آیا X یک عملگر یک‌به‌یک است؟

$$R(\rho_1)=R(\rho_2) \overset{?}{\Longrightarrow} \rho_1=\rho_2$$

دامنه تبدیل رادون، فضای خطوط صفحه را می‌توان با دو پارامتر نشان داد. در واقع هر خطی از نرمال سازی به صورت

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=t$$

نمایش داده می‌شود که $\theta\in S^1$ و $t\in\mathbb{R}$. در واقع دامنه R استوانه $S^1\times\mathbb{R}$ است، البته با یکی کردن

$$(\theta+\pi,-t)\sim(\theta,t)$$

$$R(\rho)(\theta,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t\cos\theta+u\sin\theta\,,\ t\sin\theta-u\cos\theta)\,du$$

اثبات یک به یکیِ تبدیلِ رادون در صفحه : اگر $\rho \in S(\mathbb{R}^2)$ و $R(\rho) = 0$ آنگاه $\rho = 0$.

$$R(\rho)(\theta,t) = 0 \qquad \forall (\theta,t) \in S^1 \times \mathbb{R}$$

و نسبت به t تبدیلِ فوریه بگیرید.

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R(\rho)(\theta,t)\, e^{-2\pi i \omega t}\, dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \rho(t\cos\theta + u\sin\theta,\ t\sin\theta - u\cos\theta)\, e^{-2\pi i \omega t}\, du\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x,y)\, e^{-2\pi i \omega (x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy = \hat{\rho}(\omega\cos\theta,\ \omega\sin\theta)$$

تساوی بالا برای هر $\theta \in S^1$ و $\omega \in \mathbb{R}$ برقرار است. بنابراین $\hat{\rho} \equiv 0$ و باید $\rho \equiv 0$.

تبدیل رادون در $\mathbb{R}^3$.

پیدا کردن تبدیل وارون رادون در صفحه پیچیده‌تر از $\mathbb{R}^3$ است. (مسأله ۷ و ۸ کتاب را نگاه کنید)

صورت‌بندی تبدیل رادون در $\mathbb{R}^3$ کمی متفاوت از صفحه است. درحقیقت انتگرال را به جای خطوط روی صفحات مختلف محاسبه می‌کنیم.

فضای همه خطوط در $\mathbb{R}^3$ یک فضای چهاربعدی است (چرا؟). لذا اگر با انتگرال روی خطوط کار کنیم دامنه تبدیل رادون یک فضای چهاربعدی است و به نظر می‌آید این میزان اطلاعات برای بازیابی تابع ρ (که یک تابع سه متغیره است) لازم نباشد.

فضای همه صفحات در $\mathbb{R}^3$ مشابه صفحه هم‌ارز $S^2 \times \mathbb{R}$ است. هر صفحه پس از نرمال‌سازی به صورت

$$P_{t,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \omega \cdot x = t\}$$

نمایش داده می‌شود که $\omega \in S^2$ بردار یکه است و $t \in \mathbb{R}$. البته (ω, t) و $(-\omega, -t)$ یک صفحه را نمایش می‌دهند.

$$P_{t,\omega} = P_{-t,-\omega}$$

اگر $f \in S(\mathbb{R}^3)$، تبدیل رادون

$$R(f)(P) = \int_P f$$

را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$R(f)(t,\omega) = \int_{P_{t,\omega}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2)\, du_1 du_2$$

که e_1 و e_2 دو بردار یکه‌ی عمود بر ω هستند.

مشابه حالت R^2 می‌توان رابطه‌ی زیر را اثبات کرد:

لم - اگر $f \in S(\mathbb{R}^3)$ آنگاه

$$\hat{R}(f)(s,\omega) = \hat{f}(s\omega)$$

که $\hat{f}$ تبدیل فوریه‌ی (سه‌بعدی) f است و $\hat{R}(f)$ تبدیل فوریه‌ی (یک‌بعدی) تبدیل رادون نسبت به متغیرِ t است.

اثبات ـ

$$\hat{R}(f)(s,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f)(t,\omega)\, e^{-2\pi i t s}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2)\, e^{-2\pi i t s}\, du_1 du_2\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{-2\pi i (x\cdot\omega) s}\, dx = \hat{f}(s\omega)$$

چرا تبدیل فوریه $R(f)$ نسبت به t وجود دارد؟

نتیجه ـ تبدیل رادون یک به یک است، یعنی اگر $R(f) = R(g)$ برای $f,g \in S(\mathbb{R}^3)$ آنگاه $f = g$.

به کمک لم قبل و فرمول تبدیل وارون فوریه خواهیم داشت :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\cdot\omega}\, d\omega$$

$$= \int_{S^2}\int_0^{\infty} \hat{f}(s\omega)\, e^{2\pi i x\cdot(s\omega)}\, s^2 ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= \int_{S^2}\int_0^{\infty} \widehat{R}(f)(s,\omega)\, e^{2\pi i x\cdot(s\omega)}\, s^2\, ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= \int_{S^2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R(f)(t,\omega)\, e^{-2\pi i t s}\, e^{2\pi i x\cdot(s\omega)}\, s^2\, dt\, ds\, d\sigma(\omega)$$

دوگان تبدیلِ رادون : اگر F تابعی باشد که روی $\mathbb{R}\times S^2$ تعریف شده است،

$$R^*(F)(x) := \int_{S^2} F(x\cdot\omega, \omega)\, d\sigma(\omega)$$

$$R : S(\mathbb{R}^3) \longrightarrow S(\mathbb{R}\times S^2)$$

$$R^* : S(\mathbb{R}\times S^2) \longrightarrow S(\mathbb{R}^3)$$

$$\langle Rf, F\rangle = \langle f, R^*F\rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{S^2} Rf(t,\omega)\, \overline{F(t,\omega)}\, d\sigma(\omega)\, dt = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, \overline{R^*F(x)}\, dx$$

قضیه - اگر $f \in S(\mathbb{R}^3)$ ، آنگاه $\Delta(R^*R(f)) = -8\pi^2 f$

که $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ عملگر لاپلاس است.

اثبات - با توجه به لم قبل می‌دانیم

$$R(f)(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s\omega)\, e^{2\pi i t s}\, ds$$

$$R^*R(f)(x) = \int_{S^2} R(f)(x\cdot\omega, \omega)\, d\sigma(\omega) = \int_{S^2}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\omega)\, e^{2\pi i (x\cdot\omega)s}\, ds\, d\sigma(\omega)$$

$$\Delta(R^*R(f))(x) = \int_{S^2}\int_{\mathbb{R}} -4\pi^2 |\omega|^2 s^2 \hat{f}(s\omega)\, e^{2\pi i (x\cdot\omega)s}\, ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= -8\pi^2 \int_{S^2}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(s\omega)\, e^{2\pi i (x\cdot\omega)s}\, s^2 ds\, d\sigma(\omega)$$

$$= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = -8\pi^2 f(x)$$

نکته ـ برای اینکه مسئله به قضیه قبل در $\mathbb{R}^2$ درست باشد، باید به جای عملگر Δ ، عملگری استفاده کرد که در زیر انتگرال به جای s^2 ، s داشته باشیم. عملگر $(-\Delta)^{1/2}$ چنین ویژگی دارد.

$$(-\Delta)^s f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\omega|)^{2s} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega\cdot x} \, d\omega$$

در حقیقت

تبدیل فوریه $\mathcal{F}\left((-\Delta)^s f\right) = (2\pi|\omega|)^{2s} \hat{f}(\omega)$

قضیه ـ وقتی $d=2$ ، $(-\Delta)^{1/2}\left(R^* R(f)\right) = 4\pi f$.

اثبات ـ کافی است نشان دهیم

$$\mathcal{F}\left(R^* R(f)\right)(\omega) = \frac{2}{|\omega|} \hat{f}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{F}(R^*R(f))(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} R^*R(f)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^1} R(f)(x\cdot\xi, \xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, d\xi\, dx$$

$$R(f)(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s\xi)\, e^{2\pi i t s}\, ds$$ قبلاً دیدیم که

$$\mathcal{F}(R^*R(f))(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^1}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\xi)\, e^{2\pi i (x\cdot\xi) s}\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, ds\, d\xi\, dx$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^1}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(s\xi)\, e^{2\pi i (x\cdot\xi) s}\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, ds\, d\xi\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\left[\int_{\mathbb{R}^2} 2\hat{f}(y)\, e^{2\pi i x\cdot y}\, \frac{dy}{|y|}\right] e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \frac{2\hat{f}(\omega)}{|\omega|}$$