آنالیز فوریه

جلسه هجدهم

۰۰/۲/۶

معادله موج

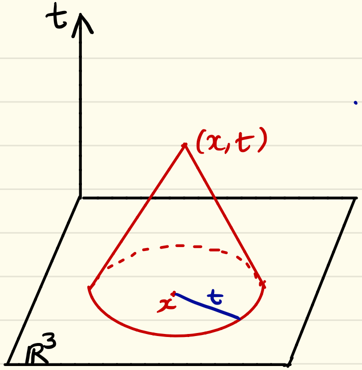
$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

جواب دالامبر $d=1$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t) \right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy$$

برای $d=3$:

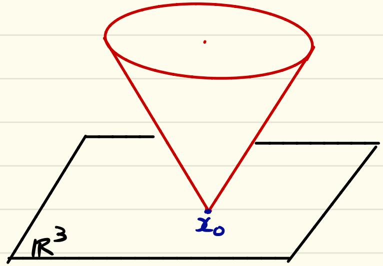
$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi} \int_{S^2} f(x-ty)\, d\sigma(y) \right] + \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x-ty)\, d\sigma(y)$$



وقتی $d=3$ ، مقدار $u(x,t)$ تنها به مقادیرِ f و g روی کره به شعاع t و مرکز x وابسته است.

برعکس مقدار شرایطِ اولیه در نقطه x_0 روی همه نقاطی که روی مخروط $\{(y,t) : |y-x_0| = t\}$

اثرگذار است.



این موضوع در بعد $d=1$ فرق می‌کند. مقدار $u(x,t)$ به مقادیرِ f و g در بازه $[x-t, x+t]$ وابسته است.

و مقدار شرایطِ اولیه در نقطه x_0 روی همه نقاط $\{(y,t) : |y-x_0| \le t\}$ تأثیر می‌گذارد.

بعد دو ، $d=2$:

وقتی که جلسه پیش برای پیدا کردن فرمول جواب اثبات کردیم، تنها برای $d=3$ برقرار است. لذا فرمول به دست آمده برای بعد دو معتبر نیست.

با تغییر متغیر مسأله را به معادله موج در بعد 3 تبدیل می‌کنیم و به کمک فرمول به دست آمده می‌توانیم جواب را در بعد دو نیز به دست آوریم.

$$x=(x_1,x_2) \qquad \tilde{x}=(x_1,x_2,x_3)$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}) := f(x_1,x_2)\,, \qquad \tilde{g}(\tilde{x}) = g(x_1,x_2)$$

$$\tilde{u}(\tilde{x},t) := u(x_1,x_2,t)$$

اگر u جواب معادله موج در $d=2$ باشد، $\tilde{u}$ جواب معادله موج در $d=3$ است.

$$\partial_t^2 \tilde{u}(\tilde{x},t) = \partial_t^2 u(x,t) = \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = \partial_{x_1}^2 \tilde{u} + \partial_{x_2}^2 \tilde{u} = \partial_{x_1}^2 \tilde{u} + \partial_{x_2}^2 \tilde{u} + \partial_{x_3}^2 \tilde{u}$$

$$\tilde{u}(\tilde{x},0) = u(x,0) = f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$$

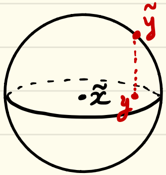
$$\partial_t \tilde{u}(\tilde{x},0) = \partial_t u(x,0) = g(x) = \tilde{g}(\tilde{x})$$

$$\tilde{u}(\tilde{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\, M_t(\tilde{f})(\tilde{x}) \Big) + t\, M_t(\tilde{g})(\tilde{x})$$

برای پیدا کردن $u(x,t)$ رابطه بالا را در نقطه $\tilde{x}=(x_1,x_2,0)$ ساده می‌کنیم. ابتدا رابطه انتگرالی

$$M_t(\tilde{f})(\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \tilde{f}(\tilde{x}-t\tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y}) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(\tilde{x})} \tilde{f}(\tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y})$$

$$= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(\tilde{x})} f(y_1,y_2)\, d\sigma(\tilde{y})$$



با گرفتن نقشه $y=(y_1,y_2) \longmapsto (y_1,y_2,(t^2-|y-x|^2)^{1/2})$ محاسبه می‌کنیم:

$$M_t(\tilde{f})(x_1,x_2,0) = \frac{2}{4\pi t^2}\int_{|y-x|\le t} f(y)\,\frac{t}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\le 1} f(x-ty)\,(1-|y|^2)^{-1/2}\,dy =: \tilde{M}_t(f)(x)$$

درنتیجه جواب $u(x,t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\,\tilde{M}_t(f)(x)\right) + t\,\tilde{M}_t(g)(x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{B_1} f(x-ty)\,(1-|y|^2)^{-1/2}\,dy\right] + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1} g(x-ty)\,(1-|y|^2)^{-1/2}\,dy$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید مقدار $u(x,t)$ به مقادیر f و g داخل دیسک $B_t(x)$ وابسته است و برعکس مقدار شرایط اولیه در نقطه x_0 در همه نقاط $\{(y,t) : |y-x_0| \le t\}$ اثرگذار است.

تقارن شعاعی و توابع بسل

قبلاً دیدیم که تبدیل فوریه هر تابع شعاعی $f(x)=f_0(|x|)$ یک تابع شعاعی $\hat{f}(\omega)=F_0(|\omega|)$ است.

سؤالی که قصد پاسخ آن را داریم ارتباط بین f_0 و F_0 است. مثلاً برای $d=1$ ، شعاعی بودن یعنی اینکه f تابع زوج است.

در این حالت برای هر $p \geq 0$ داریم:

$$F_0(p) = \hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x p}\, dx = \int_0^{\infty} f_0(x)\left[e^{-2\pi i x p} + e^{2\pi i x p}\right] dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} f_0(r)\, \cos(2\pi r p)\, dr$$

برای $d=3$ نیز به کمک لم جلسه قبل اگر قرار دهیم $\rho=|\omega|$ با تغییر مختصات به قطبی در محاسبه تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$F_0(\rho) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int_0^\infty \int_{S^2} f_0(r)\, e^{-2\pi i r y\cdot\omega}\, r^2\, d\sigma(y)\, dr$$

$$= \int_0^\infty f_0(r)\, \frac{2\sin(2\pi r\rho)}{r\rho}\, r^2\, dr$$

$$= 2\rho^{-1} \int_0^\infty f_0(r)\, \sin(2\pi r\rho)\, r\, dr$$

برای $d=2$ از توابع بسل استفاده می‌کنیم. تابع بسل $J_n(\rho)$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$ ضریب فوریه تابع $e^{i\rho\sin\theta}$ تعریف می‌شود.

$$J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho\sin\theta}\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$e^{i\rho\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\rho)\, e^{in\theta}$$

به راحتی می‌توان دید که $J_n(\rho)$ یک تابع حقیقی است و در رابطه $J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$ صدق می‌کند.

به کمک توابع بسل خواهیم داشت:

$$F_0(\rho) = \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0,-\rho) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot(0,-\rho)}\, dx$$

چون $\hat{f}$ شعاعی است

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f_0(r)\, e^{2\pi i r\rho\sin\theta}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} J_0(2\pi r\rho)\, f_0(r)\, r\, dr$$