آنالیز فوریه

جلسه شانزدهم

۳۰ / ۱ / ۰۰

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

$|\Psi(x)|^2$ تابع توزیع احتمالی حضور ذره در نقطه x

$$\int_a^b |\Psi(x)|^2 \, dx =$$ احتمال اینکه ذره در بازه (a,b) قرار داشته باشد

امید ریاضی : $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x)|^2 \, dx$

واریانس : $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 |\Psi(x)|^2 \, dx$

اگر واریانس کوچک باشد ، مثل این است که با قطعیت بالاتری می‌توان درخصوص ذره در نقطه $\bar{x}$ اظهارنظر کرد.

تابع احتمال تکانه $\omega = |\hat{\psi}(\omega)|^2$

میانگین تکانه $\quad \bar{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \, |\hat{\psi}(\omega)|^2 \, d\omega$

واریانس تکانه $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 \, |\hat{\psi}(\omega)|^2 \, d\omega$

اصل عدم قطعیت : همزمان نمی‌توان واریانس موقعیت ذره و واریانس تکانه را کوچک کرد.

در واقع حاصل ضرب این دو مقدار از یک ثابت بزرگتر است .

(عدم قطعیت موقعیت مکانی ذره) $\times$ (عدم قطعیت تکانه) $\geq \hbar / 16\pi^2$

قضیه: $\psi \in S(\mathbb{R})$ و $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ آنگاه:

$$\left[\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}} (\omega-\bar{\omega})^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

نکته- در قضیه بالا لزومی ندارد $\bar{x}$ و $\bar{\omega}$ میانگین‌های تعریف شده در صفحات قبل باشند. بلکه می‌توان آنها را هر عدد دلخواهی در نظر گرفت.

اثبات- ابتدا فرض کنید $\bar{\omega} = \bar{x} = 0$.

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} x \left(\psi \bar{\psi}' + \psi' \bar{\psi} \right) dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} 2\,|x|\,|\psi(x)|\,|\psi'(x)|\,dx$$

کوشی شوارز

$$\leq 2\left[\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

$$= 2\left[\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} \left|(\psi')^{\wedge}(\omega)\right|^2 d\omega\right]^{1/2}$$

$$= 2\left[\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} 4\pi^2\omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{16\pi^2} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2\,dx\right] \left[\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega\right]$$

حال برای $\bar{x}$ و $\bar{\omega}$ دلخواه قرار دهید:

$$\varphi(x) = e^{-2\pi i x \bar{\omega}} \psi(x+\bar{x}) \Rightarrow \hat{\varphi}(\omega) = e^{2\pi i \bar{x}(\omega+\bar{\omega})} \hat{\psi}(\omega+\bar{\omega})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega\right]$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x+\bar{x})|^2 dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega+\bar{\omega})|^2 d\omega\right]$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} (\omega-\bar{\omega})^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\right]$$

نکته - در فضای تبل و تری $\bar{p}=0$ ، $\bar{x}=\bar{p}=0$ ، تساوی تنها وقتی رخ می‌دهد که :

نامساوی اول : (1) $$-x\left(\psi\bar{\psi}'+\bar{\psi}\psi'\right)=2|x|\cdot|\psi|\cdot|\psi'|$$

نامساوی دوم (کوشی شوارتز) (2) $$|\psi'(x)|=\alpha\,|x\psi(x)|$$

$(1) \Rightarrow$ ψ یک تابع حقیقی است $\Rightarrow \begin{cases}\psi\psi'<0 & \text{برای } x>0\\ \psi\psi'>0 & \text{برای } x<0\end{cases}$

$$(2)\Longrightarrow \begin{cases}\psi'(x)=-\alpha x\psi(x) & \text{برای } x>0\\ \psi'(x)=-\alpha x\psi(x) & \text{برای } x<0\end{cases} \Rightarrow \psi(x)=A\,e^{-\alpha x^2/2}$$

$$1=\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2dx=A^2\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha x^2}dx=A^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\Rightarrow A^2=\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$$

نتیجه ـ درحالت کلی (برای هر $\bar{x}$ و $\bar{\omega}$) تساوی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که

$$\psi(x) = A e^{2\pi i (x-\bar{x})\bar{\omega}} \, e^{-B(x-\bar{x})^2} \quad , \quad |A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$$

نکته ـ شرط $\psi \in S(\mathbb{R})$ ضروری نیست و تنها باید $\psi \in L^2(\mathbb{R})$، $x\psi, \psi'$ (تابع دلخواه $\psi \in L^2$ را با توابع $\psi_n \in S(\mathbb{R})$ تقریب بزنید)

تعریف ـ برای تابع $f \in L^2$ روی $\mathbb{R}$ گوییم بخش عمده جرم آن در بازه I قرار دارد اگر

$$\int_I x^2 |f(x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 \, dx$$

نتیجه- اگر بخش عمده جرم تابع ψ در بازه I_1 و تابع $\hat{\psi}$ در بازه I_2 باشد، آنگاه

$$|I_1| \cdot |I_2| \geq \frac{1}{2\pi} \qquad (\|\psi\|_2 = 1)$$

اثبات- ابتدا فرض کنید مرکز I_1 و I_2 در مبدأ قرار داشته باشد. بنابر اصل عدم قطعیت داریم:

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\right]$$

$$\leq 4\left[\int_{I_1} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{I_2} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\right]$$

$$\leq 4\left[\int_{I_1} \frac{|I_1|^2}{4} |\psi(x)|^2 dx\right]\left[\int_{I_2} \frac{|I_2|^2}{4} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega\right] \leq \frac{|I_1|^2 \cdot |I_2|^2}{4}$$

اگر نقاط میانی I_1 و I_2 به ترتیب $\bar{x}$ و $\bar{\omega}$ باشد، به کمک اصل عدم قطعیت در حالت کلی مشابه قبل اثبات کامل می‌شود.

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \left[\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})\,|\psi(x)|^2\,dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}} (\omega-\bar{\omega})\,|\hat{\psi}(\omega)|^2\,d\omega\right]$$

تبدیلِ فوریه روی $\mathbb{R}^d$

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

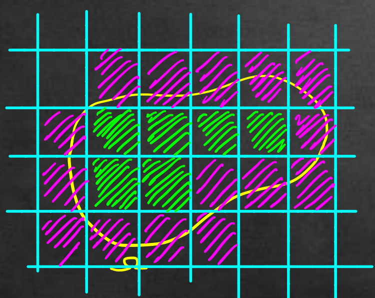
$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx$$

$$x = (x_1, \dots, x_d) \quad , \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$$

$$x\cdot\omega = x_1\omega_1 + \dots + x_d\omega_d$$

انتگرال روی $\mathbb{R}^d$:

انتگرال روی زیرمجموعه‌های کران‌دار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ مشابه یک‌بعدی است. در اینجا افراز به جای بازه‌های کوچک



ناحیه Ω را با قطعه‌های کوچک می‌پوشانیم و مجموع ریمانِ بالایی و پایینی را مشابه حالت یک‌بعدی می‌نویسیم.

انتگرال روی $\mathbb{R}^d$ را به صورت حد انتگرال روی مکعب به ضلع N یا کره به شعاع N تعریف می‌کنیم.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty} \int_{Q_N} f(x)\,dx \qquad Q_N = (-N/2, N/2)^d$$

اگر $f \geq 0$، تعریفِ بالا سازگار است. در حالت کلی اگر

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$$

انتگرال آن خوش تعریف خواهد بود.

لذا تبدیلِ فوریه روی $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ تعریف می‌شود و مشابه $d=1$.

$$\mathcal{F}: \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

مثال- $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ اگر در رابطهٔ زیر برای مقادیر ثابت و مثبت A و $\varepsilon>0$ صدق کند.

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+|x|^{d+\varepsilon}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{A\,dx}{1+|x|^{d+\varepsilon}} = \int_0^\infty \int_{\partial B_1} \frac{A\,r^{d-1}\,d\sigma\,dr}{1+r^{d+\varepsilon}} < \infty$$

روابط انتگرالی که در محاسبات از آنها زیاد استفاده خواهیم کرد:

- $$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \qquad \forall h\in\mathbb{R}^d$$
- $$\int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\,dx = \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \qquad \forall \delta>0$$
- $$\int_{\mathbb{R}^d} f(Tx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,|\det T|^{-1}\,dx$$ T یک ماتریس $d\times d$ وارون‌پذیر است.

فضای شوارتز

اگر $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ اندیس چندگانه d-بعدی باشد، آنگاه

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_d$$

با این نمادگذاری فضای شوارتز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f:\mathbb{R}^d \xrightarrow{\text{هموار}} \mathbb{C} \;\middle|\; \forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x)\right|<\infty \right\}$$

مشابه حالت یک بعدی واضح است که $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$$f\in\mathcal{S} \Rightarrow |f(x)|\le\frac{c}{1+|x|^{d+1}} \Rightarrow f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

خواص تبدیل فوریه :

1) $\mathcal{F}(f(x+h)) = e^{2\pi i \omega \cdot h}\, \hat{f}(\omega) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}(f(x+h)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i (x-h)\cdot\omega}\, dx = e^{2\pi i h\cdot w}\, \hat{f}(\omega)$$

2) $\mathcal{F}(f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot h}) = \hat{f}(\omega+h) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^d$

3) $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \delta^{-d}\, \hat{f}(\delta^{-1}\omega) \qquad \forall \delta > 0$

4) $\mathcal{F}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x)\right) = (2\pi i\omega)^{\alpha}\, \hat{f}(\omega)$

کافی است برای مشتق نسبت به یک متغیر اثبات شود و در حالت کلی با استقراء نتیجه حاصل می‌شود.

5) $\mathcal{F}\left((-2\pi i x)^{\alpha} f(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^{\alpha} \hat{f}(\omega)$

6) $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^d)$ for every $f \in S(\mathbb{R}^d)$.

$$\omega^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^{\beta} \hat{f}(\omega) = \omega^{\alpha} \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^{\beta} f(x)\right) = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} \mathcal{F}\Big(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \underbrace{\left[(-2\pi i x)^{\beta} f(x)\right]}_{\in S}\Big)$$

← تبدیل فوریه آن کران دار است.

7) $\mathcal{F}\left(f(T^{-1}x)\right) = |\det T|\, \hat{f}(T^{t}\omega)$

T یک ماتریس وارون‌پذیر است و T^t ترانهاده آن.

به‌خصوص وقتی T یک ماتریس دوران (یکانی) باشد، یعنی $T^{-1}=T^t$ آنگاه

$$\mathcal{F}(f(Tx)) = \hat{f}(T\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(f(T^{-1}x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(T^{-1}x)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i Tx\cdot\omega}\, |\det T|\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot T^{t}\omega}\, |\det T|\, dx = |\det T|\, \hat{f}(T^{t}\omega)$$

۸) تابع f را شعاعی گوییم، هرگاه $f(x) = \varphi(|x|)$. آنگاه تبدیل فوریه هر تابع شعاعی یک تابع شعاعی است.

تابع f شعاعی است هرگاه $f(Tx) = f(x)$ برای هر ماتریس یکانی T.

بنابر خاصیت قبل

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \mathcal{F}(f(Tx)) = \hat{f}(T\omega)$$

$\Rightarrow$ $\hat{f}$ شعاعی است.