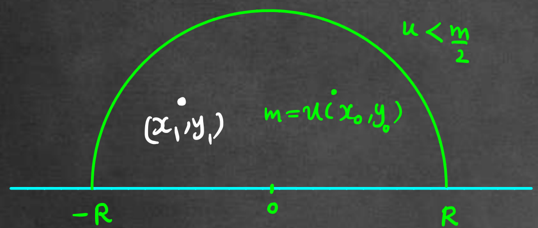
آنالیز فوریه

جلسه پانزدهم

۲۸/۱/۰۰

قضیه (یکتایی جواب) اگر u جواب معادله لاپلاس در نیم‌صفحه $y > 0$ باشد و برای $y=0$ یک تابع پیوسته باشد که در شرط مرزی $u(x,0) = 0$ صدق می‌کند. به علاوه اگر u در بی‌نهایت صفر شود، آنگاه $u \equiv 0$.

اثبات- فرض کنید $u \not\equiv 0$ و $m = u(x_0,y_0) \neq 0$. برای سادگی فرض کنید $m > 0$ وگرنه می‌توان $-u$ را به جای u گرفت.



چون u در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند، مقدار R به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که

$$u(x,y) < \frac{m}{2} \quad \text{برای} \quad |x|^2+|y|^2 > R^2$$

در نتیجه تابع u ماکسیمم خود را داخل $B_R \cap \mathbb{R}^n_+$ مثلاً در نقطه (x_1,y_1) می‌گیرد. دقت کنید این نقطه روی $y=0$ قرار ندارد چرا که $u(x,0)=0$.

بنابر خاصیت مقدار میانگین، اگر $B_r(x_1,y_1) \subseteq \mathbb{R}^2_+$

$$M = u(x_1,y_1) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(x_1,y_1)} u(x,y)\,dx\,dy \le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(x_1,y_1)} M\,dx\,dy = M$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = M \quad \text{for} \quad (x,y)\in B_r(x_1,y_1)$$

حال مجموعه $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : u(x,y)=M\}$ را در نظر بگیرید. بنابر مطلب بالا A یک مجموعه باز است.

پیوستگی u نیز نتیجه می‌دهد که A یک مجموعه بسته است. بنابر همبندی $\mathbb{R}^2_+$ باید $A=\mathbb{R}^2_+$.

یعنی $u=M$ روی $\mathbb{R}^2_+$ که با توجه به شرط مرزی و حد در بی‌نهایت باید $u\equiv 0$.

فرمول جمعی پواسون :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \qquad f\in S(\mathbb{R})$$

اثبات :

$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

- F پیوسته است . از خاصیت شوارتز تابع f نتیجه می‌شود که

$$\sum \left|f(x+n)\right| \le \sum \frac{c}{1+(x+n)^2} \le \sum \frac{c}{1+([x]+n)^2} = \sum \frac{c}{1+n^2} < \infty$$

- F مشتق‌پذیر است . کافی است سری $\sum f'(x+n)$ همگرای یکنواخت باشد که مشابه بالا اثبات می‌شود .

- $F(x+1) = F(x)$

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$$

$$c_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x}\, dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n (y-m)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i n y}\, dy = \hat{f}(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \qquad \forall x$$

نکته- شرط $f \in S$ ضروری نیست. تنها شرطی که مشتق‌پذیری F را نتیجه بدهد کافی است. به عنوان مثال اگر f و f' به طور ملایم کاهشی باشند و f پیوسته، فرمول جمع پوآسون برقرار است.

مثال -

$$\hat{g}(\omega) = \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}\right)^2 \Leftarrow g(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|\leq 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \Rightarrow \mathcal{F}\left(\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right) = g(\omega)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n+x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)\, e^{2\pi i n x} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} \qquad x \notin \mathbb{Z}$$

وقتی $x\in\mathbb{Z}$ چه اتفاقی می‌افتد؟

تمرین ۱۵ کتاب - ثابت کنید

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha}$$

مثال - $f(x) = e^{-\pi s x^2} \Leftarrow \hat{f}(\omega) = s^{-1/2} e^{-\pi \omega^2/s}$

$$\Rightarrow \sum \hat{f}(n) = \sum f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \underbrace{\theta(s)}_{\text{theta تابع}}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = s^{-1/2}\, \theta\left(\frac{1}{s}\right)$$

مثال - $\underbrace{\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}}_{\text{هسته گرمایی روی } \mathbb{R}} \Leftarrow \hat{\mathcal{H}}_t(\omega) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}$

$$H_t(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_t(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\mathcal{H}}_t(n)\, e^{2\pi i n x} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}}_{\text{هسته گرمایی روی بازه } (0,1)}$$

معادله گرما را در بازه $(0,1)$ با شرایط مرزی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<1\,,\quad 0<t \\ u(0,t) = u(1,t) \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

اگر $u(x,t) = \sum_{n\in \mathbb{Z}} a_n(t)\, e^{2\pi i n x}$ جواب مسأله باشد، باید

$$\begin{cases} a_n'(t) = -4\pi^2 n^2 a_n(t) \\ a_n(0) = \hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_n(t) = \hat{f}(n)\, e^{-4\pi^2 n^2 t} = (f * H_t)^{\wedge}(n)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = (f * H_t)(x)$$

به کمک فرمول جمع پواسون نشان می‌دهیم H_t هسته خوب است و در نتیجه $\lim_{t\to 0} H_t * f = f$

$$H_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_t(x+n)$$

$$0 \le \mathcal{H}_t \Rightarrow 0 \le H_t \Rightarrow \int_{|x|\le\frac{1}{2}} |H_t(x)|\,dx = \int_{|x|\le\frac{1}{2}} H_t(x)\,dx = 1$$

همچنین برای $\delta > 0$ ثابت داریم:

$$\int_{\delta<|x|\le\frac{1}{2}} |H_t(x)|\,dx = \underbrace{\int_{\delta<|x|\le\frac{1}{2}} \mathcal{H}_t(x)\,dx} + \int_{\delta<|x|\le\frac{1}{2}} \sum_{|n|\ge 1} \mathcal{H}_t(x+n)\,dx$$

چون $\mathcal{H}_t$ هسته خوب است وقتی $t\to 0$ این انتگرال به صفر همگرا است.

$$H_t(x+n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+n)^2/4t} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-cn^2/t}$$

$$|x| \leq \frac{1}{2}, \ |n| \geq 1 \qquad \frac{(x+n)^2}{4} \geq cn^2$$

$$\int_{|x|\leq \frac{1}{2}} \sum_{|n|\geq 1} H_t(x+n)\, dx \leq \int_{|x|\leq \frac{1}{2}} \sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{cn^2}{t}}\, dx$$

$$\leq \sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{cn^2}{2} - \frac{c}{2t}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{c}{2t}}}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n|\geq 1} e^{-\frac{cn^2}{2}} \xrightarrow[t \to 0 \text{ وقتی}]{} 0$$

مثال- $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ و $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ هسته پوآسون در نیم صفحه و دایره هستند.

بکمک فرمول جمع پوآسون خواهیم داشت:

$$P_r(2\pi x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_y(x+n) \quad , \quad r = e^{-2\pi y}$$

$$\hat{P}_y(\omega) = e^{-2\pi|\omega| y} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} P_y(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{P}_y(n)\, e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n| y}\, e^{2\pi i n x}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\, e^{2\pi i n x} = P_r(2\pi x)$$

قضیهٔ حد مرکزی

اگر $\{X_1, X_2, \ldots\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آنگاه

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

برای مقادیر بزرگ n مانند توزیع نرمال $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است. در واقع $\frac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ به توزیع نرمال $N(0,1)$ همگرا است.

فرض کنید $f(x)$ تابع توزیع $\{X_i\}$ باشد، در واقع

$$P(a \leq X_i \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

به علاوه

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx \quad , \quad \sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

کافی است قضیه را برای $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ثابت کنیم. قرار است نشان دهیم $\sqrt{n}\, S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$

به توزیع نرمال همگرا است. یعنی

$$\lim_{n \to \infty} P(a \leq \sqrt{n}\, S_n \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$P(a \le \sqrt{n}\, S_n \le b) = P(\sqrt{n}\, a \le X_1 + \cdots + X_n \le \sqrt{n}\, b)$$

$$= \int \cdots \int_{\sqrt{n}\, a \le x_1 + \cdots + x_n \le \sqrt{n}\, b} f(x_n) \cdots f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

تغییر متغیر $y_1 = x_1$ ، $y_2 = x_1 + x_2$ ، $\ldots$ ، $y_n = x_1 + \cdots + x_n$ را در نظر بگیرید

$$= \int_{\sqrt{n}\, a}^{\sqrt{n}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_n - y_{n-1})\, f(y_{n-1} - y_{n-2}) \cdots f(y_2 - y_1)\, f(y_1)\, dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \int_{\sqrt{n}\, a}^{\sqrt{n}\, b} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_n - y_{n-1}) \cdots f(y_3 - y_2)\, (f * f)(y_2)\, dy_2 \cdots dy_n$$

$$= \int_{\sqrt{n}\, a}^{\sqrt{n}\, b} \underbrace{(f * \cdots * f)}_{\text{n بار}}(y_n)\, dy_n$$

کافی است ثابت شود:

$$\int_a^b (f*\cdots*f)(\sqrt{n}x)\sqrt{n}\,dx \longrightarrow \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

یا به طور معادل برای هر $K\in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{n}(f*\cdots*f)(\sqrt{n}x)\,K(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,K(x)\,dx$$

(حالت خاص $K(x)=\chi_{(a,b)}$ قضیه را اثبات می‌کند.)

اگر $K=\hat{h}$ بنابر رابطه‌ای که در جلسه ۱۲ اثبات کردیم، می‌توان نوشت:

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{n}(f*\cdots*f)(\sqrt{n}x)\,\hat{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{n}\left[(f*\cdots*f)(\sqrt{n}x)\right]^{\wedge}(y)\,h(y)\,dy$$

$$\left[(f * \cdots * f)(\sqrt{n}\,x)\right]^{\wedge}(y) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(f * \cdots * f)^{\wedge}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\hat{f}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n}$$

درستی باید ثابت کنیم :

(*)

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right]^{n} h(y)\,dy \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\hat{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi^2 y^2}\,h(y)\,dy$$

باتوجه به اینکه فرض کردیم $\mu=0$ و $\sigma=1$ داریم :

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = 1$$

وچون f توزیع احتمالاتی است :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

$$\hat{f}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x y/\sqrt{n}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[1 - \frac{2\pi i x y}{\sqrt{n}} - \frac{2\pi^2 x^2 y^2}{n} + e_y(x)\right] dx$$

$$= 1 - \frac{2\pi^2 y^2}{n} + \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e_y(x)\, dx$$

برای اتمام اثبات نشان خواهیم داد که

$$\lim_{n\to\infty}\left[\hat{f}\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{2\pi^2 y^2}{n}\right]^n = e^{-2\pi^2 y^2}$$

و به کمک قضیه همگرایی تسلطی رابطه (*) اثبات می‌شود.

$e_y(x)$ باقیمانده تیلور مرتبه دوم تابع $e^{-2\pi i x y/\sqrt{n}}$ است. بنابراین

$$e_y(x) = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3}\left[e^{-2\pi i x y/\sqrt{n}}\right]_{y=y_0} \cdot x^3$$

$$\Rightarrow \left|e_y(x)\right| = \frac{1}{3!}\left|\frac{2\pi y x}{\sqrt{n}}\right|^3$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e_y(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{3!}\left|\frac{2\pi y}{\sqrt{n}}\right|^3 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, |x|^3\, dx$$

$$\leq \frac{c\, y^3}{n\sqrt{n}}$$