آنالیز فوریه

جلسه چهاردهم

۰۰/۱/۲۳

کاربرد تبدیل فوریه در معادلات دیفرانسیل

معادله گرما

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

اگر بتوانیم از جواب معادله نسبت به متغیر x تبدیل فوریه بگیریم ، در این صورت تعریف می‌کنیم :

$$\hat{u}(\omega,t) := \mathcal{F}(u(\cdot,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

به شرط آنکه بتوانیم از رابطه بالا نسبت به t مشتق بگیریم (اگر $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1$ مجاز هستیم)

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t u(x,t)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

از خواص تبدیل فوریه می‌دانیم اگر $u, \partial_x u, \partial_x^2 u \in \mathcal{L}^1$ آنگاه

$$\mathcal{F}(\partial_x^2 u) = (2\pi i\omega)^2 \ \hat{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (2\pi i\omega)^2 \ \hat{u}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\omega, t) = \hat{u}(\omega, 0) \ e^{-4\pi^2\omega^2 t}$$

بنابر تعریف می‌دانیم که

$$\hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-4\pi^2\omega^2 t}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\omega,t)) = f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2\omega^2 t})$$

اگر $\mathcal{H}_t(x) = K_\delta(x)$ for $\delta = 4\pi t$ یا اینکه

Heat Kernel ⟵ $$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\, e^{-x^2/4t}, \qquad t>0$$

آنگاه $\hat{\mathcal{H}}_t(\omega) = e^{-4\pi^2 t\omega^2}$. لذا با فرض برقراری همه شرایطِ خوب در محاسباتِ قبلی، کاندیدِ زیر برای جواب معادله به دست می آید:

$$u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t)(x) \qquad t>0$$

قضیه- اگر $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ و $u(x,t) = (f * H_t)(x)$، آنگاه

(i) $u \in C^2$ برای $x \in \mathbb{R}$ و $0 < t$ و در معادله گرما صدق می‌کند.

(ii) همگرایی $\lim\limits_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$ به طور یکنواخت برقرار است. درنتیجه u توسیع پیوسته در $t=0$ دارد.

(iii) $$\lim_{t \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx = 0$$

اثبات- $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) H_t(x-y)\, dy$$

برای اینکه u نسبت به x یا t مشتق‌پذیر باشد، کافی است مشتق هسته گرمایی H_t نسبت به x یا t انتگرال‌پذیر باشد.

در این صورت

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (\partial_t - \partial_x^2) H_t (x-y)\, dy$$

برای $0<t$

$$(\partial_t-\partial_x^2)\,\mathcal{H}_t = (\partial_t-\partial_x^2)\left[\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\, e^{-x^2/4t}\right] = 0$$

(ii) از قضیه‌ی هسته‌ی خوب در جلسه قبل نتیجه می‌شود.

(iii) دقت کنید:

$$\hat{u} = \hat{f}\cdot\hat{\mathcal{H}}_t = e^{-4\pi^2\omega^2 t}\,\hat{f}$$

و از آنکه تبدیل فوریه حافظ نرم L^2 است، نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)-f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega,t)-\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-4\pi^2\omega^2 t}-1\right]^2 |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega$$

با توجه به آنکه تابع زیر انتگرال تحت تسلط $|\hat{f}(\omega)|^2$ است مجازیم حد و انتگرال را جابجا کنیم.

نکته - در قضیه قبل برای اینکه u مشتق‌پذیر و در نتیجه جواب معادله گرما باشد، تنها لازم است $f \in L^1(\mathbb{R})$ باشد.

برای قسمت (ث) قضیه و اینکه u در شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ صدق کند، اگر $f \in L^1$ باشد آنگاه تساوی در نقاط پیوستگی f برقرار است.

نکته - وقتی $f \in S(\mathbb{R})$، آنگاه تابع $u(\cdot,t)$ نیز در $S(\mathbb{R})$ قرار دارد به طور یکنواخت نسبت به $0 < t$. یعنی

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0<t<T}} |x|^k \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x,t) \right| < \infty$$

نکته- فرآیند پیدا کردن کاندید جواب که در ابتدای جلسه گفته شد، یک گزاره یکتایی برای جواب ارائه می‌کند.

هر جوابی از معادله گرما که در شرایط زیر صدق کند، به صورت $u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t)(x)$ است و در نتیجه یکتا است.

$$\partial_x u \ , \ \partial_t u \ , \ u \in L^1(\mathbb{R})$$

دقت کنید اگر $f \in L^1$ باشد، آنگاه جواب $u = f * \mathcal{H}_t$ در شرایط بالا صدق می‌کند.

قضیه (یکتایی) اگر تابع $u(x,t)$ برای $t>0$ در معادله گرما صدق کند. علاوه بر این در $t=0$ پیوسته باشد و $u(x,0)=0$.

اگر $u(\cdot,t) \in S(\mathbb{R})$ برای هر t ثابت، آنگاه $u \equiv 0$.

اثبات-

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2 \, dx \ ,$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \cdot \bar{u} + \overline{\partial_t u} \cdot u \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u \cdot \bar{u} + \overline{\partial_x^2 u} \cdot u \, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} = -\int_{\mathbb{R}} 2\, \partial_x u \cdot \overline{\partial_x u} \, dx = -2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 \, dx \leq 0 \\ E(0) = 0 \\ E(t) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E(t) \equiv 0$$

مثال- تابع $u(x,t) = \frac{x}{t} H_t(x)$ در معادله گرما صدق می‌کند و $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = 0$ برای هر x.

همگرایی $u(x,t) \to 0$ وقتی $t \to 0$ یکنواخت نیست و تابع u برای $t \in [0, \infty)$ پیوسته نیست.

$$u(x,t) = \frac{x}{t} \times \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad u(ct^{3/2}, t) = \frac{c}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{c^2}{4} t^2} \to \frac{c}{\sqrt{4\pi}}$$

معادله لاپلاس در نیم‌صفحه

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

برای پیدا کردن یک کاندید جواب، با فرض اینکه u تابع خوبی باشد محاسبات زیر معتبر است:

$$\hat{u}(\omega, y) := \int_{\mathbb{R}} u(x,y)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-2\pi i x \omega}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

$$= -\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -(2\pi i \omega)^2\, \hat{u}(\omega, y)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\omega, y) = A(\omega)\, e^{-2\pi y|\omega|} + B(\omega)\, e^{2\pi y|\omega|}$$

جمله دوم نسبت به y رشدش سریع است، لذا می‌توانیم فرض کنیم $B(\omega)=0$. با توجه به رابطه $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ داریم:

$$A(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)\, e^{-2\pi y|\omega|}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = (f * P_y)(x)$$

که $P_y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\pi y|\omega|}\right)$ هسته پواسون نامیده می‌شود.

$$P_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi y|\omega|} e^{2\pi i x\omega} \, d\omega$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi\omega(y-ix)} \, d\omega + \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi\omega(y+ix)} \, d\omega$$

$$= \left. \frac{e^{-2\pi\omega(y-ix)}}{-2\pi(y-ix)} \right|_{\omega=0}^{+\infty} + \left. \frac{e^{2\pi\omega(y+ix)}}{2\pi(y+ix)} \right|_{\omega=-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2\pi(y-ix)} + \frac{1}{2\pi(y+ix)} = \frac{y}{\pi(y^2+x^2)} \qquad y > 0$$

لم - هسته پواسون $P_y(x)$، هسته خوب است وقتی $y \to 0$.

اثبات -

i)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{y^2z^2+y^2}\,y\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+1} = 1$$

ii)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P_y(x)|\,dx \underset{P_y>0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P_y(x)\,dx = 1$$

iii)
$$\int_{|x|>\delta} |P_y(x)|\,dx = \int_{|x|>\delta} \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{|z|>\frac{\delta}{y}} \frac{dz}{z^2+1} \longrightarrow 0$$

وقتی $y \to 0$

نتیجه: اگر $f\in L^1(\mathbb{R})$ و $u(x,y)=(f*P_y)(x)$ آنگاه

(i) u نسبت به x و y دوبار مشتق‌پذیر است و $\Delta u=0$ برای $0<y$.

(ii) $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y)=f(x)$ در نقاط پیوستگی f و اگر f یک تابع پیوسته باشد همگرایی یکنواخت است.

(iii) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,y)-f(x)|^2\,dx=0$

(iv) اگر $f\in S(\mathbb{R})$، آنگاه u در بی‌نهایت صفر می‌شود، یعنی $\lim\limits_{|x|+y\to\infty} u(x,y)=0$.

اثبات ـ (i)، (ii) و (iii) مشابه قضیه‌ای که برای معادلهٔ لاپلاس گفته شد، اثبات می‌شود. تنها توجه کنید که قضیهٔ همگرایی هسته‌ای

$$(f*P_y)(x)\longrightarrow f(x)$$

خوب (جلسه ۱۲)

برای توابع $f \in \mathcal{L}^1$ برقرار است. (نکته: هدف از اثبات قضیه در صفحه ۱۲ مراجعه کنید.) برای این منظور باید

به طور یکنواخت برای $|x| \geq \eta$

$$\forall \eta > 0 \quad \lim_{y \to 0} P_y(x) = 0$$

که به وضوح برقرار است.

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \leq \frac{y}{\pi(\eta^2+y^2)} \longrightarrow 0$$

اثبات (iv)

$$|u(x,y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| \frac{y}{\pi(t^2+y^2)} dt \leq \frac{1}{\pi y} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| dt$$

$$= \frac{1}{\pi y} \|f\|_1 \longrightarrow 0 \quad y \to \infty \text{ وقتی}$$

وقتی y کران دار است و $|x| \to \infty$.

$$|u(x,y)| \le \int_{|t|\le \frac{|x|}{2}} |f(x-t)| \frac{y}{\pi(t^2+y^2)}\, dt + \int_{|t|\ge \frac{|x|}{2}} |f(x-t)| \frac{y}{\pi\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)}\, dt$$

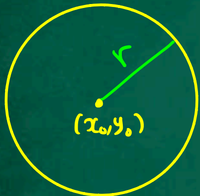
$$\le \int_{|t|\le \frac{|x|}{2}} \frac{c}{1+|x-t|} \frac{y}{\pi(t^2+y^2)}\, dt + \frac{y}{\pi |x| y} \|f\|_1$$

$$\le \frac{c}{1+\frac{|x|}{2}} + \frac{\|f\|_1}{\pi |x|} \longrightarrow 0$$

قضیه (یکتایی جواب) اگر u جواب معادله لاپلاس در نیم صفحه $y>0$ باشد و برای $y=0$ یک تابع پیوسته باشد که در شرط مرزی $u(x,0)=0$ صدق می کند. به علاوه اگر u در بی نهایت صفر شود، آنگاه $u\equiv 0$.

نکته ـ شرط اینکه u در بی نهایت صفر شود، برای یکتایی جواب ضروری است. به عنوان مثال $u(x,y)=y$ یک تابع هارمونیک است که در شرط مرزی $u(x,0)=0$ صدق می کند.

لم (خاصیت مقدار میانگین) اگر u یک تابع هارمونیک در گوی به شعاع R به مرکز (x_0,y_0) باشد، آنگاه



$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)\, d\theta \qquad \forall r<R$$

نکته- در لم بالا اگر میانگین گیری به جای روی دایره، در داخل دیسک حساب شود، باز مساوی برقرار است.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2} u(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\sin\theta)\,\rho\, d\theta\, d\rho$$

از لم بالا

$$= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi\, u(x_0,y_0)\,\rho\, d\rho = u(x_0,y_0)$$

- اثبات لم

$$\varphi(r) := \int_0^{2\pi} \underbrace{u(x_0 + r\cos\theta \,, y_0 + r\sin\theta)}_{U(r,\theta)} \, d\theta \qquad r > 0$$

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 \right) U = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} \varphi' + \varphi'' = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \partial_r U + \partial_r^2 U \quad d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 U \; d\theta = -\frac{1}{r^2} \left[\partial_\theta U(r, 2\pi) - \partial_\theta U(r, 0) \right]$$

$$= 0$$

U نسبت به θ تناوبی است.

$$\Rightarrow \quad (r\varphi')' = 0 \quad \Rightarrow \quad r\varphi' = \text{ثابت} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(r) = \frac{c_1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = c_1 \ln r + c_2$$

از طرفی $\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = 2\pi u(x_0,y_0)$ (از تعریف تابع φ نتیجه می‌شود)

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0^+} (c_1 \ln r + c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$\Rightarrow$ تابع ثابت $\varphi(r) = c_2$

$$\Rightarrow \varphi(r) = 2\pi u(x_0,y_0)$$