آنالیز فوریه

جلسه سیزدهم

۰۰/۱/۲۱

فرمول Plancherel

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

گزاره - اگر $f, g \in S(\mathbb{R})$ آنگاه

$f*g \in S(\mathbb{R})$ (i)

$\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\cdot\hat{g}$ (ii)

اثبات -

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

شرط جابجایی مشتق و انتگرال ؟؟

$$\Rightarrow \frac{d^k}{dx^k}(f*g) = \left(\frac{d^k}{dx^k} f\right)*g = f*\left(\frac{d^k}{dx^k} g\right)$$

$$\left| x^{\ell} \frac{d}{dx^k}(f*g)(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\ell} \left| \frac{d}{dx^k} f(x-t) \right| \cdot |g(t)| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ell} \left[|x-t|^{\ell} + |t|^{\ell} \right] \cdot \left| \frac{d}{dx^k} f(x-t) \right| \cdot |g(t)| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ell} C_f^{\ell,k} \, |g(t)| + C_{\ell} C_f^{k} \, |t|^{\ell} \, |g(t)| \, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} c \, (1+|t|^{\ell}) \, |g(t)| \, dt < \infty$$

اثبات (ii)

$$\mathcal{F}(f*g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x) \, e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \, g(t) \, e^{-2\pi i \omega x} dt \, dx$$

؟؟ شرط فوبینی ←

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \, e^{-2\pi i \omega (x-t)} dx \right] g(t) \, e^{-2\pi i \omega t} dt = \hat{f}(\omega) \, \hat{g}(\omega)$$

نکته - در قسمت اول گزاره در واقع اثبات کردیم

$$\frac{d}{dx^k}(f*g)(x) = (f^{(k)}*g)(x)$$

اگر $g \in \mathcal{L}^1$ و $f \in C^k$ به طوری که $f^{(i)} \in \mathcal{L}^\infty$ تابع کران دار است برای $1 \leq i \leq k$.

نکته - در قسمت دوم، برای آنکه تبدیل فوریه $f*g$ تعریف شده باشد، باید داشته باشیم $f*g \in \mathcal{L}^1$. این شرط با فرض انتگرال‌پذیری f و g برقرار است $(f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$. همین شرط برای استفاده از فوبینی کافی است.

$$f, g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\cdot\hat{g}$$

تعریف –

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \}$$

این یک فضای برداری همراه با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

و نرم زیر است

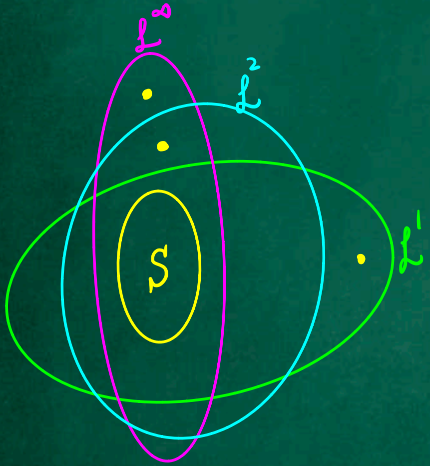
$$\| f \|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}$$

واضح است که $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \supseteq S(\mathbb{R})$.

همچنین داریم:

$$\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^\infty \subseteq \mathcal{L}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \leq \|f\|_\infty \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx = \|f\|_\infty \cdot \|f\|_1$$



مثال- تابعی در $\mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2$

$$f(x) = \frac{1}{|x|^a} \chi_{(-1,1)}$$

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

مثال- تابعی در $\mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$

$$f(x) = \frac{1}{|x|^a} \chi_{(1,\infty)}$$

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

قضیه - (plancherel) اگر $f \in S(\mathbb{R})$، آنگاه

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

اثبات - در جلسه قبل نشان دادیم که برای هر دو تابع $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

قرار دهید $g = \overline{\hat{f}}$. وقتی $f \in S$ می‌دانیم $\hat{f} \in S$ و درنتیجه $g \in S$.

$$g(y) = \overline{\hat{f}(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)\, e^{-2\pi i x y}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, e^{2\pi i x y}\,dx$$

بنابر فرمول تبدیل وارون $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x)\, e^{2\pi i x y}\,dx$ نتیجه می‌شود $\hat{g} = \overline{f}$.

اثبات دیگر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{f(x)} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, f^{b}(-x) \, dx \qquad f^{b}(y) := \overline{f(-y)}$$

$$= (f * f^{b})(0)$$

فرمول تبدیل وارون $\longleftarrow$ $$= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * f^{b})^{\wedge}(\omega) \, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \, \hat{f^{b}}(\omega) \, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \, \overline{\hat{f}(\omega)} \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$$

نکته ـ قضیه تبدیل وقتی $f \in L^1$ تابعی پیوسته که $\hat{f} \in L^1$ باشد، برقرار است و در این صورت $\hat{f} \in L^2 \cap L^\infty$.

به علاوه تبدیل فوریه حافظ ضرب داخلی است. یعنی

$$\langle f , g \rangle = \langle \hat{f} , \hat{g} \rangle \qquad \forall f, g \in S(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\, d\omega$$

اثبات ـ در رابطه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \hat{h}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, h(y)\, dy$$

قرار دهید $h(y) = \overline{\hat{g}(y)}$ و به کمک تبدیل وارون نشان دهید $\hat{h}(x) = \overline{g(x)}$

$$\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(y)}\, e^{-2\pi i x y}\, dy = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y)\, e^{2\pi i x y}\, dy} = \overline{g(x)}$$

نکته - به کمک فرمول Plancherel می‌توان تعریف تبدیل فوریه را به فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ گسترش داد. دقت کنید انتگرال زیر برای توابعی که خارج $\mathcal{L}^1$ هستند، معنی ندارد

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

از آنجا که توابع شوارتز در $\mathcal{L}^2$ چگال هستند، برای هر $f \in \mathcal{L}^2$ دنباله توابع $\varphi_n \in S$ وجود دارند که

$$\|\varphi_n - f\|_2 \longrightarrow 0$$

از تساوی $\|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_m\|_2 = \|\mathcal{F}(\varphi_n - \varphi_m)\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$ نتیجه می‌شود که $\{\hat{\varphi}_n\}$ یک دنباله کوشی در $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ است و دارای حد است. تبدیل فوریه f را حد این دنباله تعریف می‌کنیم.

$$\hat{f} := \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n \in \mathcal{L}^2$$

به راحتی می‌توان دید که تعریف بالا خوش تعریف است و به انتخاب دنباله $\{\varphi_n\}$ وابسته نیست.

اثبات متفاوت برای قضیه وایراشتراس :

قضیه - تابع پیوسته f را روی بازه فشرده $[a,b]$ درنظر بگیرید. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، چندجمله‌ای P وجود دارد که

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

اثبات - فرض کنید $[a,b] \subseteq (-M,M)$ و تابع پیوسته g را درنظر بگیرید که در شرایط زیر صدق کند :

$$g = f \quad \text{in } [a,b]$$

$$g(x) = 0 \quad \text{for } |x| \geq M$$

$$\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$$

بنابر قضیهِ صلبه

$$(g * K_\delta)(x) \xrightarrow{\text{یکنواخت}} g(x)$$

که $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$. به کمک بسط تیلور

می‌دانیم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$K_\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{-1/2}}{n!} \left(-\frac{\pi}{\delta} x\right)^n = Q_N(x) + R(x)$$

$Q_N = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ چندجمله‌ای تیلور درجه N است.

ایده: $g * Q_N$ یک چندجمله‌ای است که برای N به اندازه کافی بزرگ در شرایط قضیه صدق می‌کند.

ابتدا مقدار δ را انتخاب کنید که

$$\| g * K_\delta - g \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\| g * Q_N - g \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \| g * R \|_\infty$$

می‌دانیم $\frac{d^k}{dx^k}(g*Q_N) = g*\frac{d^k}{dx^k}Q_N$ بنابراین برای $k=N+1$

$$\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}(g*Q_N) = 0$$

درنتیجه $g*Q_N$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر N است.

$$(g*Q_N)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, Q_N(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sum_{n=0}^{N} a_n (x-t)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$$

تنها کافی است نشان دهیم برای مقادیر بزرگ N ،

$$\|g * R\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(g * R)(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)\, R(x-t)|\, dt \qquad x \in [-M, M]$$

$$= \int_{-M}^{M} |g(t)| \cdot |R(x-t)|\, dt \le \|g\|_\infty \cdot \|R\|_{L^\infty(-2M,2M)} \times 2M$$

برای مقدار ثابت δ ، می‌توان N را به گونه‌ای انتخاب کرد که

$$\|R\|_{L^\infty(-2M,2M)} < \frac{\varepsilon}{4M\|f\|_\infty}$$