آنالیز فوریه

جلسه دوازدهم

۱۶/۱/۰۰

تبدیل فوریه تابع گاوسی :

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \hat{f}(\omega)$$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \Rightarrow$$

$$(\hat{f}(0))^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, d\theta\, dr = 2\pi \times \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow \hat{f}(0) = \sqrt{\pi}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\pi i x\omega} \, dx$$

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i x) \, e^{-x^2} e^{-2\pi i x\omega} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi i \, \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) \, e^{-2\pi i x\omega} \, dx$$

$$= (\pi i) \, \mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) \right) = (\pi i) \times (2\pi i \omega) \, \mathcal{F}(e^{-x^2}) = -2\pi^2 \omega \, \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) \, e^{-\pi^2 \omega^2} = \sqrt{\pi} \, e^{-\pi^2 \omega^2}$$

نکته - از خواص تبدیل فوریه داشتیم:

$$\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(e^{-\lambda^2 x^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\, e^{-\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2\omega^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right) = e^{-\pi\omega^2}$$

از تابع گاوسی $e^{-\pi x^2}$ به عنوان نقطه ثابت تبدیل فوریه یاد می‌شود.

$$K(x) = e^{-\pi x^2} \quad , \quad K_\delta(x) = \delta^{-1/2} K\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) \Rightarrow \hat{K}_\delta(\omega) = \hat{K}(\sqrt{\delta}\,\omega) = e^{-\pi\delta\omega^2}$$

قضیه - توابع $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ یک خانواده از هسته‌های خوب هستند. یعنی در ویژگیهای زیر صدق می‌کنند:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)\,dx = 1$

(ii) $\exists M>0$ s.th. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |K_\delta(x)|\,dx \leq M \qquad \forall \delta>0$

(iii) $\forall \eta>0, \quad \displaystyle\lim_{\delta\to 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\,dx = 0$

اثبات -

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{-1/2} e^{-\pi/\delta\, x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{-1/2} e^{-y^2}\sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\,dy = 1$$

(ii) $$K_\delta(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |K_\delta(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\delta(x)\,dx = 1$$

(iii) $$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\,dx = \int_{|x|>\eta} \delta^{-1/2} e^{-\pi/\delta\, x^2}\,dx = \int_{|y|>\eta\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}} e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{\pi}} \longrightarrow 0$$

وقتی $\delta \to 0$

تعریف - $$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

برای خوش تعریفی پیچش $f*g$ باید تابع $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ به ازای هر x انتگرال‌پذیر باشد.

اگر یکی از توابع f و g انتگرال‌پذیر (عضو $L^1(\mathbb{R})$) و دیگری تابع کران‌دار (عضو $L^\infty(\mathbb{R})$) ، پیچش $f*g$ خوش تعریف است.

خواص زیر برای پیچش $f*g$ مشابه آنچه درباره‌ی متناهی که در جلسه چهارم گفته شد، برقرار است. (به شرط خوش تعریفی)

$$f*g = g*f \qquad (1)$$

$$f*(g+h) = f*g + f*h \qquad (2)$$

$$f*(g*h) = (f*g)*h \qquad (3)$$

قضیه زیر تعمیم آنچه را برای هسته‌ی خوب در بازه‌ی متناهی داشتیم، بیان می‌کند.

قضیه ـ اگر $f\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ، آنگاه $(f*K_\delta)(x) \longrightarrow f(x)$ در نقاط پیوستگی f. به علاوه اگر f پیوسته یکنواخت باشد همگرایی یکنواخت است.

اثبات ـ

$$|(f * K_\delta)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x-t) - f(x)]\, K_\delta(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\, K_\delta(t)\, dt$$

$$= \int_{|t|<\eta} \cdots + \int_{|t|\geq\eta} \cdots$$

پیوستگی f در نقطه x $\Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists \eta > 0$ s.th. $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, |t| < \eta$

$$\Rightarrow \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\, K_\delta(t)\, dt < \int_{|t|<\eta} \varepsilon\, K_\delta(t)\, dt < \varepsilon$$

$$\int_{|t|\geq\eta} |f(x-t) - f(x)|\, K_\delta(t)\, dt \leq \int_{|t|\geq\eta} 2\|f\|_\infty \cdot K_\delta(t)\, dt \longrightarrow 0$$

نکته- هرچند در اثبات فرض کردیم تابع f همزمان انتگرال‌پذیر و کران‌دار باشد و این ویژگی برای اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم مثل اعضای فضای شوارتز $S(\mathbb{R})$ و توابع به طور ملایم کاهشی می‌افتند، اما با یک اصلاح در اثبات تنها شرط انتگرال‌پذیری تابع f کافی است. تنها کافی است از خاصیت زیر برای هسته گوس خوب $K_\delta(x)=\delta^{-1/2}e^{-\frac{\pi}{\delta}x^2}$ بهره ببریم.

$$\text{(iv)} \qquad \forall \eta>0,\ \lim_{\delta\to 0} K_\delta(x)=0$$

به طور یکنواخت برای هر $|x|\geq\eta$

گزاره- اگر $f,g\in L^1(\mathbb{R})$، آنگاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)g(y)\,dy.$$

دقت کنید وقتی $f,g\in L^1(\mathbb{R})$، آنگاه تبدیل فوریه‌های آنها توابع کران‌دار هستند و انتگرال‌های بالا هر دو معنا دارند. اثبات گزاره یک نتیجه طبیعی از قضیه فوبینی برای جابجایی انتگرال‌ها است.

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|K(x,y)|\,dx\,dy<\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y)\,dy\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y)\,dx\right]dy$$

اثبات گزاره :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,e^{-2\pi i y x}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(y)\,e^{-2\pi i y x}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\,g(y)\,dy$$

قضیه (تبدیل وارون فوریه) اگر $f\in S(\mathbb{R})$ ، آنگاه

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i x\omega}\,d\omega \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

اثبات - ابتدا برای $x=0$ قضیه را اثبات می‌کنیم. باید نشان دهیم

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,d\omega$$

قرار دهید $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$ ، در این صورت $\hat{G}_\delta = K_\delta$ و از گزاره قبل استفاده کنید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,G_\delta(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,K_\delta(x)\,dx = (f * K_\delta)(0) \longrightarrow f(0)$$

از طرفی اگر از سمت چپ حد بگیریم :

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,G_\delta(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\delta\to 0} \hat{f}(\omega)\,G_\delta(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,d\omega$$

نکته ـ جابجایی حد و انتگرال :

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n \overset{?}{=} \int_A \lim_{n\to\infty} f_n$$

(1) همگرایی $f_n \to f$ یکنواخت باشد، یعنی $\sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| \longrightarrow 0$

(2) همگرایی تسلطی : یعنی تابع انتگرال‌پذیر g وجود داشته باشد ($\int_A |g(x)|dx < \infty$) که

$$|f_n| \le |g|$$

در قضیه قبل همگرایی یکنواخت $G_\varepsilon(\omega) \to 1$ برقرار نیست، اما $|\hat{f}(\omega) G_\varepsilon(\omega)| \le |\hat{f}(\omega)|$

و چون $f\in S$ است و در نتیجه $\hat{f}\in S$. تابع $\hat{f}$ انتگرال‌پذیر است و بنابر همگرایی تسلطی جابجایی حد و انتگرال مجاز است.

فرمول تبدیل وارون در نقطه‌ی دلخواه : $\quad g(y) = f(x+y)$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = e^{2\pi i x\omega}\,\hat{f}(\omega)$$

$$f(x) = g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i x\omega}\,d\omega$$

نکته - اگر $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، برای اینکه قضیه‌ی قبل برقرار باشد، تنها باید همگرایی زیر را داشته باشیم :

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,e^{-\pi\delta\omega^2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,d\omega$$

اگر $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ انتگرال‌پذیر باشد ، این شرط برقرار است . به عنوان مثال اگر تابع f ، دوبار مشتق‌پذیر بوده و $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$

این شرط برقرار است.

$$\mathcal{F}(f'') = (2\pi i\omega)^2\,\hat{f}(\omega)$$

البته این شرط نتیجه می‌دهد که f باید یک تابع پیوسته باشد. (نقاط ناپیوستگی آن رفع‌شدنی است) (چرا؟)

نتیجه ـ اگر $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $\hat{f}$، آنگاه فرمول وارون فوریه در نقاط پیوستگی f برقرار است.

تمرین ـ اگر $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $\hat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{|\omega|^{1+\alpha}}\right)$ آنگاه f هولدر از مرتبه α است. $|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^{\alpha}$

نتیجه: $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \longrightarrow S(\mathbb{R})$ یک به یک و پوشا است.

جلسه قبل نشان دادیم اگر $f \in S(\mathbb{R})$ آنگاه $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. لذا از فرمول وارون داریم

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-\omega)\, e^{-2\pi i x\omega}\, d\omega = \mathcal{F}\left(\hat{f}(-\omega)\right)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ پوشا است.

یک به یکی هم از فرمول وارون به راحتی نتیجه می‌شود.