آنالیز فوریه

جلسه یازدهم

۱۴/۱/۰۰

تبدیل فوریه :

سری فوریه تابع f در بازه $[-\pi,\pi]$:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

نمایشی برای تابع f به صورت ترکیب خطی توابع نوسانی e^{inx}.

در عمل تبدیل زیر به دست می‌آید :

$$\mathcal{F} : f \longmapsto \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

در این روش تنها تعداد تابع در بازه $[-\pi,\pi]$ مهم است و فرض بر این است که f یک تابع تناوبی با دوره تناوب 2π است.

هدف این جلسه این است که اگر f روی $\mathbb{R}$ تعریف شده و تناوبی نباشد، نمایشی از آن به صورت ترکیب توابع نوسانی $e^{i\omega x}$ به دست آوریم.

اگر f را در بازه $[-l, l]$ تحدید کنیم و سپس به صورت تابع متناوبی با دوره $2l$ توسعه دهیم، می‌توانیم سری فوریه زیر را برای آن بنویسیم.

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi x/l} \qquad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\, e^{-in\pi y/l}\, dy$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\, e^{in\pi(x-y)/l}\, dy$$

$$=: \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{l}\, F_l\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$

$$F_l(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy \quad \sim \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy$$

برای مقادیر خیلی بزرگ l

به طور شهودی می‌توان انتظار داشت که تقریب زیر برای مقادیر بزرگ ℓ برقرار باشد:

$$f(x) \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{\ell} F\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega$$

اگر تقریب‌ها بالا برقرار باشند، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{i\omega(x-y)}\, dy\, d\omega \tag{1}$$

که ایده تعریف تبدیل فوریه از آن به دست می‌آید:

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \quad \xleftrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \quad \xleftrightarrow{\text{تبدیل وارون}} \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

نکته - تعریفِ تبدیلِ فوریه در کتابهای مختلف متفاوت است. به روشهای مختلف می‌توان رابطهٔ (۱) را به صورت وارونِ یک تبدیل بیان کرد. مثلاً

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x \xi}\, d\xi$$

در کتاب از نمادگذاری بالا استفاده شده است.

برای دقیق کردن مطالب باید رابطهٔ (۱) را اثبات کنیم. قبل از آن فضای توابعی را تعریف می‌کنیم که بتوان تبدیلِ فوریهٔ آنها را بیان کرد.

انتگرال ناسره روی $(-\infty,+\infty)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

(i) مقدار اصلی انتگرال بالا را برای حد زیر تعریف می‌کنیم، به شرط آنکه حد وجود داشته باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\, dx$$

(تذکر) انتگرال f را به صورت مجموع دو انتگرال روی $(0,\infty)$ و $(-\infty,0)$ تعریف می‌کنیم به شرط آنکه این جمع قابل محاسبه باشد
(یعنی $+\infty+(-\infty)$ نباشد)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} f(x)\,dx$$

اگر تابع f مثبت باشد، دو تعریف بالا معادل هستند، همچنین اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$.

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx < +\infty \right\}$$

مثال- اگر ثابت $A>0$ وجود داشته باشد که تابع پیوسته f در $|f(x)| \le \dfrac{A}{1+x^2}$ برای هر $x\in\mathbb{R}$
صدق کند، آنگاه $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. این توابع را به طور ملایم کاهشی (moderate decrease) می‌نامیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}\,dx = A\tan^{-1}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = A\pi$$

خواص فضای $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: $\quad f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

(۱) خطی : $af+bg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ برای هر $a,b \in \mathbb{R}$. به علاوه $\int_{-\infty}^{+\infty}(af+bg)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

(۲) انتقال : $\forall h \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

(۳) تجانس : $\forall \lambda > 0$

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

(۴) پیوستگی :

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-f(x)|\, dx = 0$$

(1) $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty \Leftarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و به طور مشابه برای g.

$$af+bg \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|af(x)+bg(x)|\,dx < +\infty$$

$$\Uparrow$$

$$\leq |a|\int_{-N}^{N}|f(x)|\,dx + |b|\int_{-N}^{N}|g(x)|\,dx < \infty$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} f(x-h)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} f(x-h)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-h}^{N-h} f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N-h}^{-h} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N-h} f(x)\,dx + \int_{-h}^{0} f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N-h}^{0} f(x)\,dx - \int_{-h}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

نکته - اگر $f\in L^1(\mathbb{R})$ و $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ ، آنگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ ، مقدار M وجود دارد که

$$\int_{|x|\ge M}|f(x)|\,dx < \varepsilon$$

تعریف این انتگرال به صورت انتگرال ناسره تابع $f(x)\,\chi_{\{|x|\ge N\}}$

($\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ ، M را عددی که بگیرید برای $N\ge M$
فاصله جملات این دنباله با حدش کمتر از ε باشد)

(4) نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon>0$ ، اگر h به اندازه کافی کوچک باشد،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-f(x)|\,dx \leq \varepsilon$$

بنابر نکته قبل $M>0$ وجود دارد که

$$\int_{|x|\geq M} |f(x)|\,dx < \varepsilon/3$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-h)-f(x)|\,dx = \int_{-2M}^{2M} |f(x-h)-f(x)|\,dx + \underbrace{\int_{|x|\geq 2M} |f(x-h)-f(x)|\,dx}$$

$$\leq \int_{|x|\geq 2M} |f(x-h)|+|f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_{|x|\geq M} 2\,|f(x)|\,dx < \frac{2\varepsilon}{3}$$

به شرط آنکه $h\leq M$.

تنها کافی است نشان دهیم برای M انتخاب شده، می‌توان h را آن قدر کوچک گرفت که

$$\int_{-2M}^{2M} |f(x-h) - f(x)|\, dx < \varepsilon/3$$

اگر f پیوسته باشد، بنابر پیوستگی یکنواخت در بازه $[-2M,2M]$، اگر h به اندازه کافی کوچک باشد،

$$|f(x-h) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{12M}$$

اگر f پیوسته نباشد، دنباله g_k از توابع پیوسته وجود دارد که

$$\int_{-3M}^{3M} |f(x) - g_k(x)|\, dx \longrightarrow 0$$

$$\int_{-2M}^{2M} |f(x-h) - f(x)|\, dx \leq \int_{-2M}^{2M} |f(x-h) - g_k(x-h)|\, dx + \int_{-2M}^{2M} |g_k(x-h) - g_k(x)|\, dx$$

$$+ \int_{-2M}^{2M} |f(x) - g_k(x)|\, dx$$

$$< \varepsilon/3$$

تبدیل فوریه : برای هر تابع $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ، تبدیل فوریه آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad |\hat{f}(\omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

تعریف : $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists M \ge 0 \text{ s.th. } |f(x)| \le M \ \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega)$$

خواص تبدیل فوریه :

(۱) اگر $f\in L^1(\mathbb{R})$ آنگاه $\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{f}(\omega)e^{2\pi i h\omega}$ برای هر $h\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(f(x+h)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)\, e^{-2\pi i x\cdot\omega}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i (x-h)\omega}\, dx = e^{2\pi i h\omega}\, \hat{f}(\omega)$$

(۲) اگر $f\in L^1(\mathbb{R})$ آنگاه $\mathcal{F}(f(x)e^{-2\pi i x h}) = \hat{f}(\omega+h)$ برای هر $h\in\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x h}\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x(\omega+h)}\, dx = \hat{f}(\omega+h)$$

(3) $\mathcal{F}(f(\lambda x)) = \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\omega)$ برای هر $\lambda>0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda}\omega}\, \frac{dx}{\lambda} = \lambda^{-1}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$$

(4) اگر f مشتق‌پذیر باشد و $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$، آنگاه $\mathcal{F}(f') = 2\pi i\omega\, \hat{f}(\omega)$

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f'(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\int_{-N}^{N} -f(x)\left(e^{-2\pi i x\omega}\right)' dx + f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\Big|_{-N}^{N}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} -f(x)\,(-2\pi i\omega)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = 2\pi i\omega\, \hat{f}(\omega)$$

(5) اگر $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ آنگاه $\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))$

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx\right] \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\omega}\left[f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\right] dx$$

$$= \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))$$

جابجایی مشتق و انتگرال :

$$h(\omega) = \int K(x,\omega)\, dx$$

سؤال : در چه شرایطی h مشتق پذیر است و

$$h'(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial \omega} K(x,\omega)\, dx \quad ?$$

پاسخ : به شرط آنکه $\int \left| \frac{\partial}{\partial \omega} K(x,\omega) \right| dx < \infty$.

$$h'(\omega) = \lim_{t\to 0} \frac{h(\omega+t) - h(\omega)}{t} = \lim_{t\to 0} \int \frac{K(x,\omega+t) - K(\omega)}{t}\, dx$$

$$\stackrel{?}{=} \int \lim_{t\to 0} \frac{K(x,\omega+t) - K(\omega)}{t}\, dx$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial \omega} K(x,\omega)\, dx$$

تعریف (فضای شوارتز Schwartz):

فضای همه توابع هموار f (بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر) که خود تابع f و همه مشتقات آن سریعاً کاهشی باشند، یعنی

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \qquad \forall k, l \geq 0$$

این فضا را با $S(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

نکته- این تعریف با اینکه به جای سوپریمم فرض کنیم حد عبارت که بالا وقتی $|x|\to\infty$ صفر می‌شود معادل است. (چرا؟)

اگر $f\in S(\mathbb{R})$ آنگاه $xf(x)\in S(\mathbb{R})$ و f'. (چرا؟)

مثال- $S(\mathbb{R}) \supseteq C_0^\infty(\mathbb{R})=$ توابع هموار با تکیه‌گاه فشرده

مثال - $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

نکته - $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

$$f \in S \Rightarrow \left|x^2 f(x)\right| \leq M < \infty$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad , \quad A = 2\max\left\{ M, \sup_{|x|\leq 1} |f(x)| \right\}$$

$$\Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1$$

قضیه - اگر $f \in S(\mathbb{R})$، آنگاه $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

اثبات - باید نشان دهیم $\hat{f} \in C^\infty$ به علاوه $|\omega|^k \left|(\hat{f})^{(l)}(\omega)\right|$ روی $\mathbb{R}$ کران‌دار است.

برای اینکه $(\hat{f})^{(l)}$ وجود داشته باشد، باید $x^l f(x) \in \mathcal{L}^1$ باشد. چون $f \in S$ پس $x^l f(x) \in S$ و در نتیجه $x^l f(x) \in \mathcal{L}^1$

$$\Rightarrow \quad \hat{f}^{(l)}(\omega) = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^l f(x) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^k \hat{f}^{(l)}(\omega) = \omega^k \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^l f(x) \right) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \underbrace{\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx^k} \left((-2\pi i x)^l f(x) \right) \right]}_{\text{کران‌دار است.}}$$