آنالیز فوریه

جلسه دهم

۹۹/۱۲/۲۵

تابع پیوسته هیچ جا مشتق پذیر

- در 1861 ریمان تابع زیر را به عنوان یک تابع هیچ جا مشتق پذیر پیشنهاد کرد. (البته بدون اثبات)

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

- در 1872 وایراشتراس اولین مثال را با اثبات ارائه کرد.

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \qquad 1 < a \in \mathbb{Z},\ 0 < b < 1,\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

- در 1916 هاردی ثابت کرد مثال ریمان در نقاط $x = \alpha\pi$ مشتق پذیر نیست وقتی α
  - گنگ است
  - عددی گویا به صورت $\frac{2p}{4q+1}$ یا $\frac{2p+1}{2(2q+1)}$ است.

- در 1969 گرور نشان داد که مثال ریمان نقاط $x = \alpha\pi$ که $\alpha = \frac{2p+1}{2q+1}$ مشتق پذیر است.

قضیه - اگر $0<\alpha<1$، آنگاه تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$$

پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌ناپذیر است.

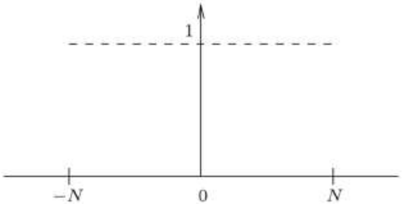
از همگرایی مطلق سری بالا نتیجه می‌شود که f یک تابع پیوسته است و سری فوق، سری فوریه آن است که تعداد زیادی از جملات آن صفر است.

ایده اثبات - برای تابع g، قرار دهید $S_N(g)=g*D_N$ که مجموع جزئی سری فوریه g است و

$\sigma_N(g)=g*F_N$ مجموع میانگین چزارو.

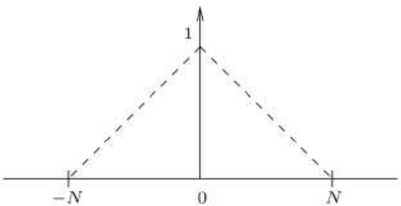
و میانگین تأخیری سری فوریه را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\Delta_N(g)=2\sigma_{2N}(g)-\sigma_N(g)=g*(2F_{2N}-F_N)$$



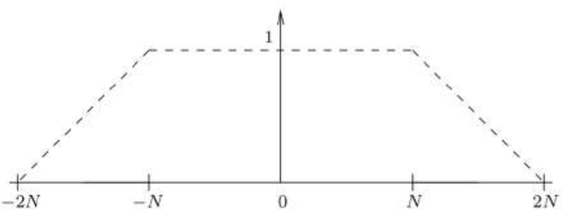
Partial sums

$S_N(g)(x) = \sum_{|n|\le N} a_n e^{inx}$



Cesàro means

$\sigma_N(g)(x) = \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a_n e^{inx}$



Delayed means

$\Delta_N(g)(x) = 2\sigma_{2N}(g)(x) - \sigma_N(g)(x)$

$$g \sim \sum a_n e^{inx}$$

$$\sigma_N(g) = \frac{S_0(g) + \cdots + S_{N-1}(g)}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{|n|\le \ell} a_n e^{inx}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{|n|\le N} (N - |n|) a_n e^{inx}$$

$$\Delta_N(g) = 2\sigma_{2N} - \sigma_N$$

$$= \sum_{|n|\le 2N} 2\left(1 - \frac{|n|}{2N}\right) a_n e^{inx} - \sum_{|n|\le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a_n e^{inx}$$

$$= \sum_{|n|\le N} a_n e^{inx} + \sum_{N<|n|\le 2N} 2\left(1 - \frac{|n|}{2N}\right) a_n e^{inx}$$

برای تابع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}$ داریم:

$$\Delta_{2^k} = S_{2^k}$$

در واقع $2^k \leq N < 2^{k+1}$ ،

$$S_N = \Delta_{2^k}$$

و روابط زیر برقرارست:

$$(*) \qquad \Delta_{2^k}(f) - \Delta_{2^{k-1}}(f) = 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

لم- اگر تابع g در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\sigma_N(g)'(x_0) = O(\log N)$$

و در نتیجه

$$\Delta_N(g)'(x_0) = O(\log N)$$

اثبات قضیه: بنابر رابطه (*)

$$\Delta_{2^k}(f)'(x_0) - \Delta_{2^{k-1}}(f)'(x_0) = i\, 2^{k(1-\alpha)} e^{i 2^k x}$$

اما بنابر لم قبل اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد، باید

$$\Delta_{2^k}(f)'(x_0) = O(k)$$

که برای $\alpha < 1$ تناقض است.

اثبات لم -

$$\sigma_N(g)(x) = (g * F_N)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)\, g(y)\, dy$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sigma_N(g)'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(x_0-y)\, g(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\, g(x_0-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\, [\, g(x_0-y) - g(x_0)\,]\, dy$$

زیرا F_N تناوبی است و در نتیجه $\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(y)\,dy = 0$

چون g در x_0 مشتق پذیر است، بنابراین ثابت $c>0$ وجود دارد که

$$|g(x_0-y) - g(x_0)| \le c\,|y| \qquad \forall y \in (-\pi, \pi)$$

$$\Rightarrow \quad |\sigma_N(g)'(x_0)| \leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(y)| \cdot |y| \, dy$$

از طرفی دو تقریب زیر برای تابع F_N برقرار است:

$$|F_N'(y)| \leq \frac{A}{|y|^2} \quad , \quad |F_N'(y)| \leq A N^2 \qquad \forall y, N$$

که ثابت A مستقل از N است.

فرض کنید این تقریبها برقرار باشند:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(y)| \cdot |y| \, dy = \int_{|y| \leq \frac{1}{N}} \cdots + \int_{|y| \geq \frac{1}{N}} \cdots \leq \int_{|y| \leq \frac{1}{N}} A N^2 |y| \, dy + \int_{|y| \geq \frac{1}{N}} \frac{A}{|y|^2} \cdot |y| \, dy$$

$$= A N^2 \cdot \frac{1}{N^2} + 2A \left[\log \pi - \log \frac{1}{N} \right] = O(\log N)$$

اکنون نشان می‌دهیم تقریب‌های ارائه‌شده برای $F_N'(y)$ برقرار هستند.

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow F_N'(x) = \frac{\sin \frac{Nx}{2} \cos \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{N}\,\frac{\cos x/2 \, \sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^3 x/2}$$

$$|x^2 F_N'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin x/2}\right)^2 |\sin Nx| + \left(\frac{x}{\sin x/2}\right)^2 \left|\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{N \sin x/2}\right| \cdot \left|\sin \frac{Nx}{2} . \cos \frac{x}{2}\right|$$

$$= O(1)$$

$$F_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} \Rightarrow F_N'(x) = \sum_{|n| \leq N} in \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx}$$

$$|F_N'(x)| \leq \sum_{|n| \leq N} |n| \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) = O(N^2)$$

نکته- تابع f که در قضیه قبل هیچ جا مشتق پذیر است، هولدر مرتبه α است.

$$|f(x+h)-f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \left(e^{i2^n(x+h)} - e^{i2^n x} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \left| e^{i2^n h} - 1 \right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cdot 2\left|\sin(2^{n-1}h)\right|$$

$2^{k-1}|h| \leq 1 < 2^k|h|$

$$\leq \sum_{n=0}^{K} 2^{-n\alpha} \cdot 2 \cdot 2^{n-1} h + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cdot 2$$

$$= \frac{h \cdot (1-2^{(k+1)(1-\alpha)})}{1-2^{1-\alpha}} + \frac{2^{1-(k+1)\alpha}}{1-2^{-\alpha}}$$

$$\leq c_1 h \, 2^{k(1-\alpha)} + c_2 \, 2^{-k\alpha} \leq c|h|^{\alpha}$$

نکته - این مثالی که نشان دادیم برعکس مثالهای ریمان و وایراشتراس یک تابع مختلط است و لزومی ندارد که خاصیت هیچ جا

مشتق ناپذیری آن نتیجه بدهد که قسمت حقیقی یا موهومی آن هیچ جا مشتق پذیر است. با این حال با کمی تغییر در اثبات

می توان دید که قسمت حقیقی و موهومی آن این خاصیت را دارند. اگر

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2^n x)$$

در نسخه حقیقی S_N ، σ_N و Δ_N خواهیم داشت:

$$\Delta_{2^n}(F) - \Delta_{2^{n-1}}(F) = 2^{-n\alpha} \cos 2^n x$$

$$\Delta_{2^n}(F)' - \Delta_{2^{n-1}}(F)' = -2^{n(1-\alpha)} \sin 2^n x$$

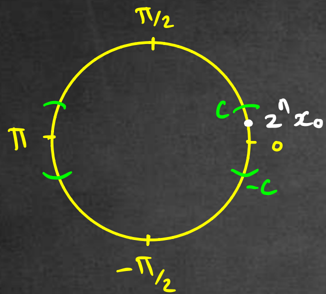
هر چند جمله $2^{n(1-\alpha)}$ رشد نمایی دارد ولی جمله $\sin 2^n x$ می تواند آن را خراب کند. اما اگر صورت لم را به شکل زیر اصلاح کنیم،

این مشکل برطرف می شود.

لم - اگر g در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$\Delta_N(g)'(x_0+h) = O(\log N) \qquad |h| \le \frac{c}{N}$$

برای یک ثابت $c>0$ مستقل از N.



حال کافی است در رابطه زیر $|h| \le \frac{c}{2^n}$ را انتخاب کنیم که

$$\sin c = c_* \le |\sin 2^n(x_0+h)|$$

$$\Delta_{2^n}(F)'(x_0+h) - \Delta_{2^{n-1}}(F)'(x_0+h) = -2^{n(1-\alpha)}\sin(2^n(x_0+h))$$

بنابر لم بالا سمت چپ $O(n)$ خواهد بود که تناقض است.

اثبات لم قبل - اگر اثبات قبل را تکرار کنیم و با جایگزینی x_0+h به جای x_0 به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$|\sigma_N(g)'(x_0+h)| \leq \frac{c_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(y)|\cdot|y-h|\,dy$$

$$\leq \frac{c_0}{2\pi}\int_{|y|\leq \frac{c_1}{N}} AN^2\,|y-h|\,dy + \frac{c_0}{2\pi}\int_{|y|\geq \frac{c_1}{N}} \frac{A}{|y|^2}\big(|y|+|h|\big)\,dy$$

$$\leq \frac{c_0}{2\pi}\, AN^2 \cdot \frac{c_1+C}{N}\cdot\frac{2c_1}{N} + \frac{2c_0}{2\pi}\left[\left(\log\pi-\log\frac{c_1}{N}\right)+|h|\left(\frac{N}{c_1}-\frac{1}{\pi}\right)\right]$$

$$= O(\log N)$$