آنالیز فوریه

جلسه نهم

۹۹/۱۲/۲۳

هدف: اگر γ یک عدد گنگ باشد، جزء اعشار دنباله $\{n\gamma\}$ در بازه $[0,1)$ به طور یکسان توزیع می‌شود.

$[x]$ = بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x

$\langle x\rangle = x-[x]$ جزء کسری x

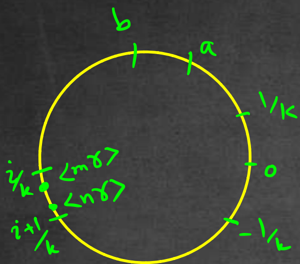
اگر $\gamma=\frac{p}{q}$ یک عدد گویا باشد که $(p,q)=1$ آنگاه دنباله $\langle n\gamma\rangle$ تنها شامل اعضای مجموعه زیر است:

$$\left\{0,\frac{1}{q},\frac{2}{q},\dots,\frac{q-1}{q}\right\}$$

برعکس این مطلب نیز بدین صورت برقرار است. اگر دنباله $\{\langle n\gamma\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ تنها تعداد متناهی مقدار داشته باشد، آنگاه γ یک عدد گویا است.

$$\langle m\gamma\rangle=\langle n\gamma\rangle \Rightarrow (m-n)\gamma\in\mathbb{Z}$$

درنتیجه برای یک عدد گنگ γ، هیچ دو عضو دنباله $\langle n\gamma\rangle$ برابر نیست. همچنین می‌توان دید که دنباله $\langle n\gamma\rangle$ در $[0,1)$ چگال است. (چرا؟)



برای اینکه نشان دهیم در بازه دلخواه (a,b) یک عضو دنباله قرار دارد، کافی است اثبات کنیم یک عضو دنباله در $|\langle n\gamma\rangle| \le \frac{1}{k}$ صدق می‌کند که $\frac{1}{k} < b-a$.

بازه $[0,1)$ را به k قسمت مساوی تقسیم کنید. بنابر اصل لانه کبوتری دو عضو این دنباله در زیربازه $\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$ قرار دارند. (دقت کنید هیچ دو عضوی از دنباله برابر نیستند). به وضوح

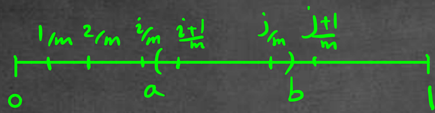
$$|\langle (m-n)\gamma\rangle| < \frac{1}{k}$$

تعریف ـ دنباله اعداد ξ_1، ξ_2، ... در $[0,1)$ را گوییم به طور یکسان توزیع شده‌اند اگر برای هر بازه $(a,b) \subseteq [0,1)$ داشته باشیم:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} = b-a$$

مثال - دنباله زیر در $[0,1)$ بطور یکسان توزیع شده اند

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$$



$$\frac{i}{m} \le a < \frac{i+1}{m} \quad , \quad \frac{j}{m} \le b < \frac{j+1}{m}$$

$$m(b-a)-1 \le j-i \le \#\left\{0 \le k \le m-1 : \frac{k}{m} \in (a,b)\right\} \le j-i+1 \le m(b-a)+2$$

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{2}(b-a) - n \le \#\left\{1 \le k \le N : \xi_n \in (a,b)\right\} \le \binom{n+1}{2}(b-a)+2n$$

$$\binom{n+1}{2} \le M \le \binom{n+2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\left[\binom{n+1}{2}(b-a) - n\right]}{\binom{n+2}{2}} \le \frac{1}{M}\#\left\{1 \le k \le M : \xi_n \in (a,b)\right\} \le \frac{\left[\binom{n+2}{2}(b-a)+2(n+1)\right]}{\binom{n+1}{2}}$$

$\downarrow$

$b-a$

مثال- اگر γ یک عدد گویا باشد، دنباله $\langle n\gamma \rangle$ در $[0,1)$ به طور یکسان توزیع نمی‌شود.

$$\gamma = p/q \implies \langle n\gamma \rangle \in \{0, 1/q, \dots, \frac{q-1}{q}\}$$

$$\langle n\gamma \rangle \notin (0, \frac{1}{2q}) \implies \lim \frac{1}{N} \# \{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (0, \frac{1}{2q})\} = 0$$

مثال- اگر $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله همه اعداد گویا در $[0,1)$ باشد، آنگاه دنباله زیر به طور یکسان توزیع نمی‌شود.

$$0, r_1, 0, r_2, 0, r_3, 0, \dots$$

کافی است یک بازه به طول کوچکتر از $1/2$ را حول نقطه صفر در نظر بگیریم. آنگاه میانگین تعداد اعضای دنباله که در آن بازه هستند لااقل $1/2$ است.

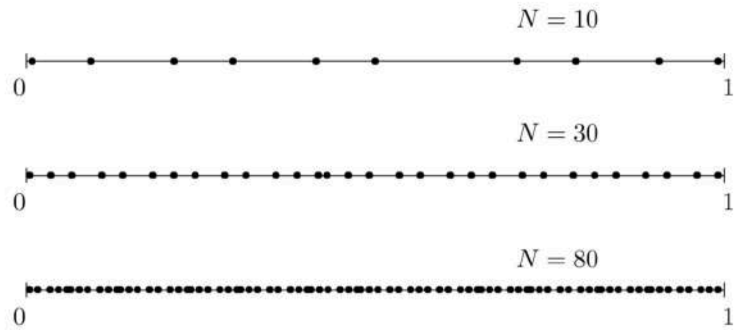


Figure 2. The sequence $\langle\gamma\rangle, \langle 2\gamma\rangle, \langle 3\gamma\rangle, \ldots, \langle N\gamma\rangle$ when $\gamma = \sqrt{2}$

قضیه- اگر γ یک عدد گنگ باشد، آنگاه دنباله $\langle n\gamma\rangle$ در $[0,1)$ به طور یکسان توزیع می‌شود.

ایده اثبات - داریم:

$$\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma\rangle \in (a,b)\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t)\,dt$$ نشان می‌دهیم

لم- اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر با دوره تناوب 1 باشد و γ یک عدد گنگ، آنگاه

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

اثبات- گام اول: اگر $f(x)=e^{2\pi i k x}$ که $k\in\mathbb{Z}$.

برای $k=0$ بدیهی است. اگر $k\neq 0$،

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n\gamma} = \frac{1}{N}\,\frac{e^{2\pi i k\gamma}\left(1-e^{2\pi i k N\gamma}\right)}{1-e^{2\pi i k\gamma}} \longrightarrow 0$$

دقت کنید وقتی γ گنگ است $1-e^{2\pi i k\gamma}\neq 0$.

به علاوه

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x}\,dx = 0$$

گام دوم: اگر f یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد.

این مطلب به وضوح از گام اول و اینکه خاصیت خطی در صورت لم برقرار است. یعنی اگر برای f_1 و f_2 لم برقرار باشد، برای $\alpha f_1+\beta f_2$ نیز درست است.

گام سوم: اگر f یک تابع پیوسته باشد

می‌دانیم برای هر $\varepsilon > 0$، چندجمله‌ای مثلثاتی $P(x)$ وجود دارد که $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$

بنابر گام دوم برای مقادیر N از یک جا به بعد داریم:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[f(n\gamma) - P(n\gamma) \right] \right| \\ &+ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx \right| \\ &+ \left| \int_0^1 \left(P(x) - f(x) \right) dx \right| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

گام چهارم : اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر باشد که دنباله توابع g_k و h_k وجود دارند به طوری که لم برای g_k و h_k برقرار است و

$$g_k \leq f \leq h_k \quad , \quad \int_0^1 g_k(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \quad , \quad \int_0^1 h_k(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

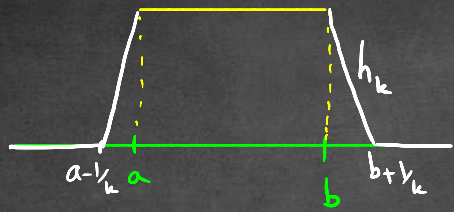
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_k(n\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_k(n\gamma)$$

مقدار k را ثابت نگه داریم و N را به بی‌نهایت میل دهید.

$$\int_0^1 g_k(x)dx \leq \liminf \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \leq \limsup \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \leq \int_0^1 h_k(x)\,dx$$

اکنون $k \to \infty$ تا لم برای توابع انتگرال‌پذیر با شرط بالا ثابت شود.

گام پنجم: اگر $f=\chi_{(a,b)}$ باشد، به کمک گام چهارم کافی است دنباله توابع پیوسته g_k و h_k را بسازیم.



$$h_k(x)=\begin{cases}0 & x\notin(a-1/k,\, b+1/k)\\ 1 & x\in(a,b)\end{cases}$$

در بقیه نقاط به طور پیوسته و خطی تعریف می‌کنیم

به طور مشابه

$$g_k(x)=\begin{cases}0 & x\notin(a,b)\\ 1 & x\in(a+1/k,\, b-1/k)\end{cases}$$

گام ششم: اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر دلخواه باشد. برای افراز دلخواه $0=x_0<x_1<\dots<x_M=1$

$$M_i=\sup_{x_i<x<x_{i+1}} f(x) \qquad m_i=\inf_{x_i\le x\le x_{i+1}} f(x)$$

$$f_U^M(x)=\sum_{i=0}^{M-1} M_i\,\chi_{(x_i,x_{i+1})}(x) \quad , \quad f_L^M(x)=\sum_{i=0}^{M-1} m_i\,\chi_{(x_i,x_{i+1})}(x)$$

$$f_L^M(x)\le f(x)\le f_U^M(x) \;, \quad \int_0^1 f_U^M(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \;, \quad \int_0^1 f_L^M(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

از طرفی بنابر گام پنجم لم برای توابع f_L^M و f_U^M درست است. و در نتیجه از گام چهارم نتیجه می‌شود که لم برای هر تابع انتگرال‌پذیر درست است.

نکته ـ لمی که اثبات کردیم یک تفسیرِ متفاوتی در سیستمهای دینامیکی و نظریه ارگودیک دارد. اگر تبدیلِ

$$\rho : \theta \longmapsto \theta + 2\pi\gamma$$

را روی دایره در نظر بگیریم. یک مسیرِ دینامیکی از نقطهٔ آغازینِ θ، عبارتست از

$$\theta,\ \rho(\theta),\ \rho^2(\theta),\ \dots,\ \rho^n(\theta) = \theta + 2\pi n\gamma,\ \dots$$

عبارت $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\rho^n(\theta))$ میانگین‌گیری در زمان تابع f روی مسیرِ شروع شده از θ است.

این میانگین‌گیری در حد برای هر θ به میانگینِ تابع f روی دایره،

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

همگرا است. توجیهِ این پدیده این است که هر مسیرِ در این سیستم دینامیکی تقریباً از همه جای دامنه عبور می‌کند.

نکته- اگر γ یک عدد گویا باشد، لم قبل اشتباه است. در حقیقت داریم:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \longrightarrow \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} f\left(\frac{i}{q}\right)$$

که $\gamma = p/q$ و $(p,q)=1$

$$\left\{ f(n\gamma), \dots, f((n+q-1)\gamma) \right\} = \left\{ f(0), f\left(\frac{1}{q}\right), \dots, f\left(\frac{q-1}{q}\right) \right\}$$

قضیه وِیل Weyl : دنباله اعداد حقیقی $\xi_1, \xi_2, \dots$ در بازه $[0,1)$ به طور یکسان توزیع می‌شود اگر و تنها اگر

برای هر عدد صحیح $k \neq 0$ داشته باشیم

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n} \longrightarrow 0$$

اثبات. اگر شرط بالا برقرار باشد، گام اول لم قبل درست است و در نتیجه می‌توان لم را برای دنباله $\{\xi_n\}$ اثبات کرد.

یعنی

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

برای هر تابع انتگرال‌پذیرِ f. در حالت خاص $f = \chi_{(a,b)}$ نشان می‌دهد که دنباله به طور یکسان توزیع شده است.

برعکس اگر $\{\xi_n\}$ به طور یکسان توزیع شده باشند، گام پنجم اثبات لم برقرار است و به راحتی لم قبل با گام‌های بالا

اثبات می‌شود. در حالت خاص $f(x) = e^{2\pi i k x}$ شرط ویل به دست می‌آید.