آنالیز فوریه

جلسه هشتم

۹۹/۱۲/۱۸

همگرایی یکنواخت

$$\|S_N(f) - f\|_\infty = \sup_{|\theta|\le\pi} |S_N(f)(\theta) - f(\theta)| \longrightarrow 0$$

بنابر آزمون وایرشتراس اگر سری عددی $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ همگرا باشد، آنگاه $S_N(f)$ همگرای یکنواخت است.

اگر $S_N(f)$ همگرای یکنواخت باشد، حتماً حد آن f است و باید f پیوسته باشد.

$$S_N(f) \xrightarrow{\text{بطور یکنواخت}} g \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(f)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \hat{f}(n)$$

درنتیجه $f(\theta) = g(\theta)$ اگر θ نقطه پیوستگی $f-g$ باشد. یعنی $f=g$ خارج یک مجموعه اندازه صفر.

قضیه- اگر تابع f روی دایره مشتق‌پذیر باشد و f' انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آنگاه سری فوریه f همگرای یکنواخت است.

اثبات-

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}}}_{0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,(-in)\,e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= in\,\hat{f}(n)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\hat{f'}(n)|}{|n|} \leq |\hat{f}(0)| + \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f'}(n)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^2}\Big)^{1/2}$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \times \Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta\Big]^{1/2}$$

درنتیجه سری فوریه f همگرای یکنواخت است.

نکته- همگرایی یکنواخت با شرط لیپ‌شیتز به جای مشتق‌پذیری نیز برقرار است.

$$|f(x)-f(y)| \le k\,|x-y| \qquad \forall\, x,y$$

اثبات-

$$g_h(x) := f(x+h) - f(x-h)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}_h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+h)-f(x-h)\big)e^{-inx} = \left(e^{inh} - e^{-inh}\right)\hat{f}(n)$$

$$4K^2h^2 \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x-h)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_h(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4(\sin nh)^2\,|\hat{f}(n)|^2$$

f لیپ‌شیتز است

قرار دهید $h=\frac{\pi}{2^{p+1}}$ برای $2^{p-1}<|n|\le 2^p$ داریم $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin nh \le 1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{2^{p-1}<|n|\le 2^p} |\hat{f}(n)|^2 \le \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}$$

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)| \leq \Big[\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} 1\Big]^{1/2} \Big[\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|^2\Big]^{1/2}$$

$$\leq 2^{\frac{p-1}{2}} \times \frac{k^2\pi^2}{2^{2p+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + |\hat{f}(1)| + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2}{2^{3/2(p+1)}} < \infty$$

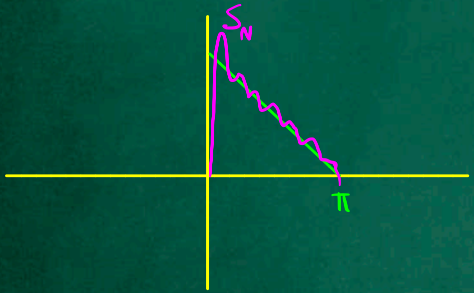
تمرین – با کمی تصحیح اثبات قبل، نشان دهید همگرایی یکنواخت برای توابع هولدر مرتبه $\alpha > \frac{1}{2}$ برقرار است.

$$|f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|^{\alpha}$$

پدیده گیبس (Gibbs)

سری فوریه تابع $f(\theta)=\pi-\theta$ برای $0<\theta<\pi$ که به صورت فرد و با دوره تناوب 2π توسیع یافته است، به صورت زیر است

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{in\theta}}{in} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$



همگرایی یکنواخت یعنی

$$\| S_N(f) - f \|_\infty \to 0$$

یا به عبارتی

$$\forall \epsilon\ \exists N_\epsilon \text{ sth. } N \geq N_\epsilon,\ \forall \theta\ \ |S_N(f)(\theta) - f(\theta)| < \epsilon$$

نقیض همگرایی یکنواخت:

$$\exists \epsilon_0\ \exists N_k \to \infty,\ \exists \theta_k \text{ sth. } |S_{N_k}(f)(\theta_k) - f(\theta_k)| > \epsilon_0$$

نشان می‌دهیم $\epsilon_0 < \max\limits_{0<\theta\leq\pi/N} \left| S_N(f)(\theta) - f(\theta) \right|$ که همگرایی یکنواخت را رد می‌کند.

$$S_N(f)(\theta) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\theta}{n} = 2\sum_{n=1}^{N} \int_0^{\theta} -\cos nt \, dt$$

$$= \int_0^{\theta} (D_N(t) - 1)\, dt$$

$$\Longrightarrow \quad S_N(f)(\theta) - f(\theta) = \int_0^{\theta} D_N(t)\, dt - \pi$$

$$\int_0^{\theta} D_N(t)\, dt = \int_0^{\theta} \frac{\sin (N+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt \geq \int_0^{\theta} \frac{\sin (N+\frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}}\, dt = 2\int_0^{(N+\frac{1}{2})\theta} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$\max_{0<\theta<\frac{\pi}{N}} \left[S_N(f)(\theta) - f(\theta) \right] = \int_0^{\frac{\pi}{N+1/2}} D_N(t)\, dt - \pi$$

$$\geq 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx - \pi > -2\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx > 0$$

تمرین : نشان دهید $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx - \pi/2 = -\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

به علاوه براحتی می‌توان دید که

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx < 0$$

فصل ۴ کاربردهای سری فوریه

نامساوی isoperimetric :

با یک خم بسته به طول l در صفحه، بیشترین مساحت برای چه شکلی است؟

تعریف- $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را خم هموار در صفحه گوییم هرگاه تابع γ دارای مشتق پیوسته باشد به طوری که

$$\gamma'(t)\neq 0 \qquad \forall\, t\in[a,b]$$

و آن را خم بسته گوییم هرگاه $\gamma(a)=\gamma(b)$.

آن را ساده گوییم هرگاه خودش را قطع نکند. یعنی دو نقطه $t_1,t_2\in(a,b)$ وجود نداشته باشد که

$$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$$

اگر تصویرِ $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ را با Γ نشان دهیم، γ را یکِ پارامتریشِ Γ می‌نامیم.

تابعِ $s:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ را بازپارامتریشِ خم Γ گوییم هرگاه تابع s یک تابع دوسوییِ و C^1 باشد. پارامتریشِ جدید با ضابطه $\eta(t)=\gamma(s(t))$ به دست می‌آید. اگر $s'>0$ بازپارامتریشِ جهت‌نگهدار، و اگر $s'<0$ آن را جهت‌برگردان گوییم.

تعریفِ طول خم: یکِ پارامتریشِ $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ برای خم Γ در نظر بگیرید. آنگاه رابطه انتگرالی

$$\ell=\int_a^b|\gamma'(s)|\,ds$$

طول خم را محاسبه می‌کند.

$$\gamma(s)=(x(s),y(s))$$

$$\gamma'(s)=(x'(s),y'(s)),\qquad |\gamma'(s)|=\sqrt{(x')^2+(y')^2}$$

به راحتی می‌توان دید که این تعریف نسبت به بازپارامتریشِ $s:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ خوش‌تعریف است.

$$\ell=\int_a^b|\eta'(t)|\,dt=\int_c^d|\gamma'(s)|\,ds$$

تعریف (پارامتریِ برحسب طول)

$\gamma:[0,\ell]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را پارامتریِ برحسب طول خم Γ گوییم هرگاه $|\gamma'(s)|=1$.

برای هر خمی می‌توان یک پارامتریِ برحسب طول در نظر گرفت. فرض کنید $\eta:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ یک پارامتریِ اولیه Γ باشد.

$$T:[a,b]\longrightarrow[0,\ell] \qquad T(t):=\int_a^t|\eta'(\theta)|\,d\theta$$

$$T'(t)=|\eta'(t)|>0$$

بنابراین T یک تابع دوسوییِ است و به کمک بازپارامتریِ T^{-1}، پارامتریِ برحسب طول Γ به دست می‌آید.

$$\gamma(s)=\eta(T^{-1}(s)) \Rightarrow \gamma'(s)=\eta'(T^{-1}(s))\,(T^{-1})'(s)=\frac{\eta'(T^{-1}(s))}{T'(T^{-1}(s))}=\frac{\eta'(T^{-1}(s))}{|\eta'(T^{-1}(s))|}$$

$$\Rightarrow |\gamma'(s)|=1$$

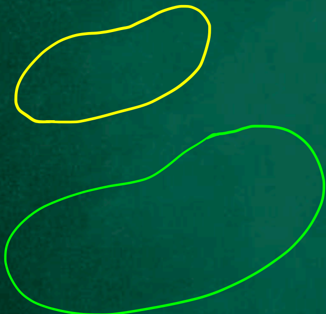
تعریفِ مساحت :

فرمول گرین : اگر Γ یک خم ساده بسته باشد و $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ توابع مشتق پذیر. آنگاه

$$\int_{\mathcal{A}} (P_x + Q_y)\, dx\, dy = \int_{\Gamma} P\, dy - Q\, dx = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))\,\dot{y} - Q(x(t),y(t))\,\dot{x}\right] dt$$

با توجه به فرمول گرین مساحت داخل خم ساده بسته Γ با رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$A = \frac{1}{2}\left| \int_{\Gamma} x\, dy - y\, dx \right| = \frac{1}{2}\left| \int_a^b x y' - y x'\, dt \right|$$



قضیهٔ نامساوی (isoperimetric) فرض کنید Γ یک خم بسته ساده در $\mathbb{R}^2$ با طول l باشد که مساحت درون آن A است. آنگاه

$$A \le \frac{l^2}{4\pi}$$

و تساوی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که Γ یک دایره باشد.

اثبات- با یک تجانس می‌توانیم فرض کنیم $l=2\pi$. اگر Γ را برحسب طول پارامتر کنیم، داریم

$$\gamma:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(s)=(x(s),y(s)) \qquad |\gamma'(s)|^2=(x'(s))^2+(y'(s))^2=1$$

$$\gamma(0)=\gamma(2\pi)$$

توابع $x(s)$ و $y(s)$ به صورت تناوبی با دوره 2π توسیع داده می‌شوند. سری فوریه آنها عبارتست از:

$$x(s) \sim \sum a_n e^{ins} \qquad\qquad y(s) \sim \sum b_n e^{ins}$$

$$x'(s) \sim \sum in\, a_n e^{ins} \qquad\qquad y'(s) \sim \sum in\, b_n e^{ins}$$

بنابر تساوی پارسوال داریم:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x'(s))^2 + (y'(s))^2\, ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \qquad (*)$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\, ds\right| = \pi\left|\langle x, y'\rangle - \langle y, x'\rangle\right|$$

ضرب داخلی دو تابع

دقت کنید x و y توابع حقیقی هستند.

$$= \pi\left|\langle (a_n), (in\, b_n)\rangle_{\ell^2} - \langle (b_n), (in\, a_n)\rangle_{\ell^2}\right| \le \sum \pi|n|\,|a_n\bar{b}_n - \bar{a}_n b_n|$$

$$|a_n\bar{b}_n - b_n\bar{a}_n| \leq 2|a_n|\cdot|b_n| \leq |a_n|^2+|b_n|^2$$

$$\Rightarrow \quad A \leq \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$$

$$\leq \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right) \underset{(*)}{=} \pi$$

<u>شرط تساوی</u> : $a_n=b_n=0$ برای $|n|\geq 2$.

و $|a_n\bar{b}_n - b_n\bar{a}_n| = 2|a_n||b_n| = |a_n|^2+|b_n|^2$ برای $n=\pm 1$

$$\Rightarrow \quad |a_n|=|b_n|$$

از طرفی x و y توابع حقیقی هستند، در نتیجه $\quad a_{-1}=\bar{a}_1 \;,\; b_{-1}=\bar{b}_1$

$(*) \Rightarrow \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad |a_1| = |b_1| = \frac{1}{2}$

$$a_1 = \frac{1}{2} e^{i\alpha} \quad , \quad b_1 = \frac{1}{2} e^{i\beta}$$

$$\frac{1}{2} = |a_1 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 b_1| = \frac{1}{2} |\sin(\alpha - \beta)|$$

$$\Rightarrow \quad \alpha - \beta = k\pi + \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad x(s) = a_{-1} e^{-is} + a_0 + a_1 e^{is} = a_0 + \cos(\alpha + s)$$

$$y(s) = b_{-1} e^{-is} + b_0 + b_1 e^{is} = b_0 + \cos(\beta + s) = b_0 + \sin(\alpha + s)$$

$\Rightarrow (x(s) - a_0)^2 + (y(s) - b_0)^2 = 1 \quad \Rightarrow$ $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ دایره به شعاع 1 و مرکز (a_0, b_0) است