آنالیز فوریه

جلسه هفتم

۹۹/۱۲/۱۶

همگرایی نقطه‌وار سری فوریه

فرض کنید f یک تابع انتگرال‌پذیر روی دایره باشد که در نقطه θ_0 مشتق‌پذیر است. آنگاه

$$S_N(f)(\theta_0) \longrightarrow f(\theta_0)$$

اثبات-

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = (f * D_N)(\theta_0) - f(\theta_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)]\, D_N(t)\, dt$$

$$D_N(t) = \frac{\sin (N + 1/2)t}{\sin t/2}$$

قرار دهید:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & t \neq 0 \\[2ex] -f'(\theta_0) & t = 0 \end{cases}$$

تابع F انتگرال‌پذیر است. زیرا در نقطه $t=0$ پیوسته است و نقاط ناپیوستگی آن مانند $f(\theta_0 - t)$ است که یک مجموعه اندازه صفر است. به‌علاوه F کران‌دار است چون در $t=0$ حد دارد (و پیوسته است) و خارج یک همسایگی $t=0$ کران‌دار است.

$$S_N(f)(\theta_0) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, t \, D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{t}{\sin t/2} \sin (N + \tfrac{1}{2}) t \; dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(F(t)\, \frac{t \cos t/2}{\sin t/2} \right) \sin Nt \, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(F(t)\, t \right) \cos Nt \, dt$$

بنابر نامساوی بسل (یا تساوی پارسوال) از جلسه قبل می‌دانیم ضرایب فوریه هر تابع انتگرال‌پذیر به صفر همگرا است.

$$g \in R \Rightarrow \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \to 0$$

اگر g یک تابع حقیقی باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \hat{g}(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta \to 0 \\ \operatorname{Im} \hat{g}(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta \to 0 \end{cases}$$

نکته – در اثبات قبل می‌توانیم به‌جای شرط مشتق، تنها فرض کنیم که $\dfrac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{t}$ کران‌دار است.

در این حالت تابع f را لیپ‌شیتز در نقطه θ_0 گوییم:

$$|f(\theta)-f(\theta_0)| \le M|\theta-\theta_0| \qquad \forall\,\theta$$

حتی اگر تابع f در نقطه θ_0 ناپیوسته باشد، در قضیه زیر خواهیم دید که سری فوریه تحت شرایطی می‌تواند همگرا باشد.

قضیه – فرض کنید تابع f روی دایره انتگرال‌پذیر باشد و در نقطه θ_0، حد چپ و راست f وجود داشته باشد.

به‌علاوه برای $t>0$ توابع $\dfrac{f(\theta_0+t)-f(\theta_0^+)}{t}$ و $\dfrac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0^-)}{t}$ کران‌دار باشند. آنگاه

$$S_N(f)(\theta_0) \longrightarrow \frac{f(\theta_0^+)+f(\theta_0^-)}{2}$$

اثبات - قرار دهید
$$g(\theta)=\begin{cases} f(\theta_0^+) & \theta_0<\theta\le\theta_0+\pi \\ f(\theta_0^-) & \theta_0-\pi<\theta\le\theta_0 \end{cases}$$
و به طور تناوبی توسیع دهید.

تابع $f-g$ در نقطه θ_0 لیپ‌شیتز است و در نتیجه

$$S_N(f-g)(\theta_0)\longrightarrow(f-g)(\theta_0)=0$$

کافی است نشان دهیم

$$S_N(g)(\theta_0)\longrightarrow\frac{f(\theta_0^+)+f(\theta_0^-)}{2}$$

$$S_N(g)(\theta_0)=(g*D_N)(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta_0-t)\,D_N(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(\theta_0^-)\,D_N(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\theta_0^+)\,D_N(t)\,dt$$

$$=\frac{f(\theta_0^-)+f(\theta_0^+)}{2}$$

نکته _ خاصیت همگرایی سری فوریه نشان می‌دهد که رفتار سری فوریه یک خاصیت موضعی است، هرچند ضرایب فوریه از انتگرال تابع در سرتاسر بازه به دست می‌آید. منظور این است که $S_N(f)(\theta_0)$ برای مقادیر بزرگ N تنها به رفتار f در همسایگی θ_0 اهمیت دارد. درحقیقت اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر باشند که

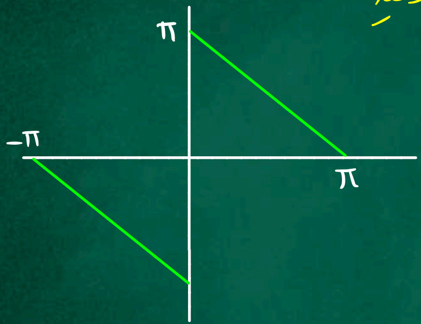
$$f(\theta) = g(\theta) \qquad \theta \in I$$

که I یک همسایگی θ_0 است. آنگاه

$$S_N(f)(\theta_0) - S_N(g)(\theta_0) \longrightarrow 0$$

زیرا تابع $f-g$ در همسایگی نقطه θ_0 برابر صفر است و بنابر قضیه همگرایی نقطه‌ای $S_N(f-g)(\theta_0) \longrightarrow 0$.

مثال - $f(\theta)=\pi-\theta$ در $0<\theta<\pi$ را به صورت فرد توسعه دهید.



$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta=\frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

$$=\frac{i}{\pi}(\pi-\theta)\frac{\cos n\theta}{n}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos n\theta}{n}\, d\theta=\frac{-i}{n}$$

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\neq 0}\frac{-i}{n}e^{in\theta}\xrightarrow{\text{همگرایی نقطه‌ای}}\pi-\theta \qquad 0<\theta<2\pi$$

تمرین - از همگرایی سری فوریه در نقطه $\theta=\frac{\pi}{2}$، مقدار سری عددی $\sum\frac{(-1)^k}{2k+1}$ را به دست آورید.

تساوی پارسوال $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2\, d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)^2\, d\theta=\frac{\pi^2}{6}$

تابع پیوسته با سری فوریه واگرا

$$S_N(f)(\theta) = \sum_{\substack{|n|\le N \\ n\neq 0}} \frac{e^{in\theta}}{n} \longrightarrow f(\theta) = \begin{cases} i(\pi-\theta) & 0<\theta<\pi \\ i(\pi+\theta) & -\pi<\theta<0 \end{cases}$$

قرار دهید

$$P_N(\theta) = e^{2iN\theta} S_N(f)(\theta) = \frac{e^{iN\theta}}{-N} + \frac{e^{i(N+1)\theta}}{-N+1} + \cdots + \frac{e^{3iN\theta}}{N}$$

جمله $e^{2iN\theta}$ ندارد.

عبارت بالا، سری فوریه تابع P_N است. لذا مجموعه‌های جزئی سری فوریه P_N را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$S_M(P_N) = \begin{cases} P_N & M\ge 3N \\ \tilde{P}_N & M=2N \\ 0 & M<N \end{cases}$$

$$\tilde{P}_N(\theta) = \frac{e^{iN\theta}}{-N} + \cdots + \frac{e^{i(2N-1)\theta}}{-1}$$

نشان می‌دهیم تابعِ

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}(\theta)$$

برای مقادیرِ مناسب α_k و N_k یک تابعِ پیوسته است که سری فوریه آن در $\theta = 0$ واگرا است.

هر تابع P_{N_k} شامل جملات $e^{iN_k\theta}$ تا $e^{3iN_k\theta}$ است. اولین فرضِ موردِ نیاز عبارت است از

$$N_{k+1} > 3N_k \tag{1}$$

در این صورت

$$S_{2N_m}(g) = \alpha_1 P_{N_1} + \cdots + \alpha_{m-1} P_{N_{m-1}} + \alpha_m \tilde{P}_{N_m}$$

از تعریفِ P_N مشخص است که $P_N(0) = 0$. در نتیجه

$$S_{2N_m}(g)(0) = \alpha_m \tilde{P}_{N_m}(0) = -\alpha_m \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N_m}\right)$$

برای اینکه $S_{2N_m}(g)(0)$ واگرا باشد، باید

$$\alpha_m \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N_m}\right) \longrightarrow \infty$$

از طرفی

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N} \geq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^N \frac{dx}{x} = \log N$$

بنابراین دومین شرطی که ضرایب α_k و N_k باید داشته باشند، عبارت است از

$$(2) \qquad \alpha_k \log N_k \longrightarrow \infty$$

برای اینکه تابع g پیوسته باشد، کافی است سری $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}$ همگرای یکنواخت باشد. برای این منظور باید سری عددی
$\sum \alpha_k \|P_{N_k}\|_\infty < \infty$ همگرا باشد. اما

$$\|P_{N_k}\|_\infty = \|e^{2iN_k\theta} S_{N_k}(f)\|_\infty = \|S_{N_k}(f)\|_\infty$$

اگر بدانیم $\{\|S_{N_k}(f)\|_\infty\}_{k=1}^{\infty}$ کران‌دار است، آنگاه تنها شرط زیر برای پیوستگی g لازم است.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty \qquad (3)$$

به عنوان مثال $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$ و $N_k = 3^{2^k}$ در شرایط (1)، (2) و (3) صدق می‌کند.

تنها باید شرط کران‌داری $\{\|S_{N_k}(f)\|_\infty\}_{k=1}^{\infty}$ را بررسی کنیم که به کمک لم زیر اثبات می‌شود.

لم - فرض کنید $A_r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n$ کران‌دار باشد وقتی $r \to 1$. اگر $c_n = O(\frac{1}{n})$ آنگاه مجموع‌های جزئی $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$ کران‌دار هستند. به علاوه اگر $|A_r| \leq M$ و $|nc_n| \leq M$ آنگاه

$$|S_N| \leq 3M$$

ابتدا لم را برای سری فوریه $\sum_{n\neq 0} \frac{e^{in\theta}}{n}$ استفاده می‌کنیم. در انتها اثبات لم را نشان می‌دهیم.

$$c_n = \frac{e^{in\theta}}{n} + \frac{e^{-in\theta}}{-n} = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

برای استفاده از لم باید $A_r(f)(\theta) = (f * P_r)(\theta)$ کران‌دار باشد.

$$|A_r(f)(\theta)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)\, P_r(t)\, dt\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = \|f\|_\infty$$

در نتیجه باید مجموعه‌های جزئی $S_N(f)(\theta)$ به طور یکنواخت کران‌دار باشند.

اثبات لم - فرض کنید $n|c_n| \leq M$.

$$S_N - A_r = \sum_{n=1}^{N} (1-r^n)\, c_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n r^n$$

$$\Rightarrow \quad |S_N - A_r| \leq \sum_{n=1}^{N} |c_n|\,(1-r^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|\, r^n$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| r^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{n} r^n \leq \frac{M}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \leq \frac{M}{N} \frac{1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| (1-r^n) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{M}{n} (1-r)(1+r+\dots+r^{n-1})$$

$$\leq MN(1-r)$$

اگر قرار دهیم $1-r = \frac{1}{N}$ آنگاه

$$|S_N - A_r| \leq 2M \Rightarrow |S_N| \leq 3M$$