# آنالیز فوریه

جلسه ششم

۹۹/۱۲/۱۱

همگرایی در نرم سری فوریه :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{inx} , \qquad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

در این طلبه قصد داریم همگرایی زیر را نشان دهیم :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| S_N(f)(x) - f(x) \right|^2 dx \longrightarrow 0$$

## فضای ضرب داخلی:

اگر $V$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، تابع $\mathbb{C} \longrightarrow V \times V : \langle \cdot , \cdot \rangle$ را ضرب داخلی روی $V$ گوییم هرگاه

i) نسبت به مؤلفه اول خطی است، یعنی

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \qquad \forall u,v,w \in V$$

$$\langle ru, v \rangle = r \langle u, v \rangle \qquad \forall r \in \mathbb{C} \;,\; u,v \in V$$

ii) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$

iii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ برای هر $u \in V$ و $\langle u, u \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

نکته- اگر $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ضرب داخلی روی $V$ باشد، آنگاه $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ یک نرم خواهد بود.

مثال- $\mathbb{C}^d = \{(z_1, \dots, z_d) : z_i \in \mathbb{C}\}$

$$z = (z_1, \dots, z_d) \quad , \quad w = (\omega_1, \dots, \omega_d)$$

رابطه روبرو یک ضرب داخلی تعریف می‌کند $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{\omega}_1 + \cdots + z_d \bar{\omega}_d$

نرم القایی آن عبارتست از $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2}$

مثال- $\ell^2 = \{(z_i)_{i=-\infty}^{+\infty} : \sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i|^2 < \infty\}$

به عنوان تمرین نشان دهید $\ell^2$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. عبارت زیر یک ضرب داخلی روی این فضا است

$$z = (z_i)_{i=-\infty}^{\infty} \quad , \quad w = (\omega_i)_{i=-\infty}^{+\infty} \qquad \langle z, w \rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} z_i \bar{w}_i$$

نامساوی $|z_i \bar{w}_i| \leq \frac{1}{2}(|z_i|^2 + |w_i|^2)$ ثابت می‌کند که تابع $\langle \cdot , \cdot \rangle$ روی $\ell^2$ خوش تعریف است.

نرم القایی از این ضرب داخلی برابر است با $\|z\| = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i|^2\right)^{1/2}$

مثال- فضای برداری توابع ریمان انتگرال پذیر روی بازه $[-\pi,\pi] = R$

رابطه
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta$$

در خواص (i) و (ii) ضرب داخلی صدق می‌کند. اما در خاصیت (iii) $\langle f,f \rangle = 0$ تساوی

بدان معنی است که $f(\theta)=0$ در هر نقطه پیوستگی آن. برای اینکه رابطه بالا ضرب داخلی باشد، اعضای $R$ را در کلاسهای هم‌ارزی

زیر در نظر می‌گیریم.

$$f \sim g \iff f(\theta) = g(\theta) \text{ خارج یک مجموعه اندازه صفر داشته باشیم}$$

در واقع هر عضو $R$ یک کلاس هم‌ارزی است که هر دو تابع هم ارز $f \sim g$ در یک کلاس هستند (یا یکی در نظر گرفته می‌شوند)

در این فضا ضرب داخلی بالا، نرم زیر را القاء می‌کند

$$\|f\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta\right]^{1/2}$$


نکته - ضرب داخلی به نوعی مفهوم زاویه دو بردار را نشان می دهد. درواقع

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

برای خوش تعریفی زاویه باید نامساوی زیر را داشته باشیم که به نامساوی کوشی-شوارتز معروف است

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

اثبات کوشی-شوارتز : $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|u+tv\|^2 = \langle u+tv, u+tv\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle tv,tv\rangle + \langle u,tv\rangle + \langle tv,u\rangle = \|u\|^2 + t^2\|v\|^2 + t\Big[\underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle}\Big]$$

این منحنیهای درجه ۲ برای هر $t \in \mathbb{R}$ مثبت است، بنابراین

$$|\mathrm{Re}\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

اگر به جای $t$ قرار دهیم $it$ و محاسبه بالا را تکرار کنیم، نتیجه می شود $|\mathrm{Im}\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ .

نکته - برای اینکه نشان دهیم $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ یک نرم است به نامساوی کوشی-شوارتز احتیاج داریم. درحقیقت در اثبات نامساوی مثلث از آن استفاده می شود.

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

تعریف ـ دو بردار $u$ و $v$ را هم عمود (متعامد) گوییم، هرگاه $\langle u, v\rangle = 0$ .

همچنین مجموعه $\{e_n\}_{n\in I}$ را یک مجموعه متعامد گوییم، هرگاه $\forall n\neq m \quad \langle e_n, e_m\rangle = 0$

و آن را متعامد یکه گوییم، هرگاه به علاوه داشته باشیم $\|e_n\| = 1$ .

قضیه فیثاغورس ـ $\langle u, v\rangle = 0 \Leftarrow \|u\pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ و برعکس وقتی درست است که در میدان اعداد حقیقی باشیم.

نتیجه ـ اگر $\{e_n\}_{n\in I}$ یک مجموعه متناهی از بردارهای متعامد یکه باشد، آنگاه $\sum_{n\in I} |a_n|^2 = \|\sum_{n\in I} a_n e_n\|^2$ برای هر $a_n\in\mathbb{C}$

مثال ـ اگر $e_n = \{z_m\}_{m=-\infty}^{+\infty} \in \ell^2$ که $z_m = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n\end{cases}$ آنگاه $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال ـ دنباله توابع $e_n(x) = e^{inx}$ برای $n\in\mathbb{Z}$ یک مجموعه متعامد یکه در $\mathcal{R}$ تشکیل می‌دهند

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ 1 & n=m\end{cases}$$

نکته - اگر $f$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد،

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e_n(x)}\,dx$$

و در نتیجه

$$S_N(f) = \sum_{|n|\le N} \langle f, e_n \rangle\, e_n$$

و با توجه به اینکه $\{e_n\}$ متعامد یکه است، داریم:

$$\|S_N(f)\|^2 = \sum_{|n|\le N} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{|n|\le N} |\hat{f}(n)|^2$$

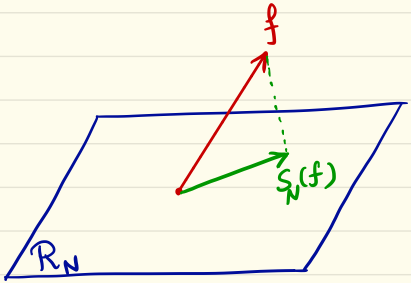
هدف:

$$\|f - S_N(f)\| \longrightarrow 0$$

$$\langle f - S_N(f), e_m \rangle = \langle f, e_m \rangle - \Big\langle \sum_{|n|\le N} \langle f, e_n \rangle e_n, e_m \Big\rangle$$

$$= \langle f, e_m \rangle - \sum_{|n|\le N} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle = 0$$

به شرط آنکه $|m| \le N$.




درنتیجه $f - S_N(f)$ بر زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $\{e_n\}_{n=-N}^{N}$ عمود است.

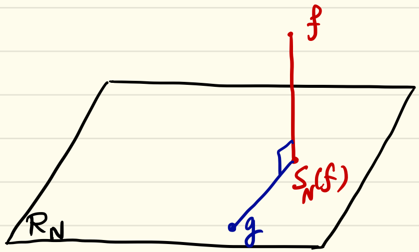
این زیرفضا را با $R_N$ نشان می‌دهیم که یک زیرفضای $2N+1$ بعدی است.

$$R_N = \Big\{ \sum_{|n|\le N} a_n e_n \;:\; a_n \in \mathbb{C} \Big\}$$

گزاره- $S_N(f)$ بهترین تقریب تابع $f$ در زیرفضای $R_N$ است. یعنی برای هر $g \in R_N$ داریم:

$$\| f - S_N(f) \| \le \| f - g \|$$

و تساوی تنها در حالتی برقرار است که $g = S_N(f)$.




اثبات- $g - S_N(f) \in R_N \;,\; f - S_N(f) \perp R_N \Rightarrow \langle g - S_N(f), f - S_N(f) \rangle = 0$

$$\Rightarrow \; \|f-g\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f) - g\|^2 \ge \|f - S_N(f)\|^2$$

نکته - چون $f - S_N(f) \perp R_N$ و $S_N(f) \in R_N$ بنابراین

$$\langle f - S_N(f) , S_N(f) \rangle = 0$$

و بنابر قضیه فیثاغورس

$$\|f\|^2 = \|(f - S_N(f)) + S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$$

$$= \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)|^2$$

درنتیجه: ① نامساوی بسل $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$

② $\|f - S_N(f)\| \to 0$ اگر و تنها اگر $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$

③ لم ریمان-لبگ: اگر $f \in R$ آنگاه $\hat{f}(n) \to 0$.

نکته- لم ریمان- لبگ نتایج جلسه سوم برای رفتار مجانبی ضرایب فوریه را بهتر می‌کند. مثلاً اگر $f \in C^k$ آنگاه $\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ یعنی $|n|^k \hat{f}(n) \to 0$.

هدف: $\|f - S_N(f)\|_2 \longrightarrow 0$

ایده اثبات: نشان می‌دهیم برای مقادیر بزرگ $N$ عضوی از $R_N$ وجود دارد که به اندازه دلخواه به $f$ نزدیک باشد و

چون $S_N(f)$ بهترین تقریب است، در نتیجه $S_N(f)$ به اندازه دلخواه به $f$ نزدیک می‌شود.

$$\forall \varepsilon\ \exists M \text{ sth. } \forall N \geq M\ \exists g \in R_N,\quad \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

حالت اول: وقتی $f$ پیوسته است.

بنابر نتیجه جمع‌پذیری فژر و در جلسه قبل می‌دانیم میانگین‌های فژر به طور یکنواخت به $f$ همگرا است. در نتیجه $M$ وجود دارد که برای $N \geq M$

$$\sup_{|x| \leq \pi} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| < \epsilon$$

از طرفی می‌دانیم $\sigma_N(f) = \dfrac{S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N} \in R_{N-1} \subseteq R_N$

$$\Rightarrow \quad \| \sigma_N(f) - f \|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \epsilon$$

**حالت دوم:** $f \in R$.

در این حالت به کمک لمی که در جلسه چهارم بیان کردیم می‌توانیم تابع $f$ را با توابع پیوسته $f_k$ تقریب بزنیم. در واقع

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| \, dx \to 0 \quad , \quad \|f_k\|_\infty \le \|f\|_\infty$$

به علاوه بنا بر حالت اول اثبات تابع $g_k \in R_k$ وجود دارد به طوری که $\|f_k - g_k\|_\infty < \epsilon/2$.

$$\|f - g_k\|_2 \le \|f - f_k\|_2 + \|f_k - g_k\|_2 \le \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k|^2 \, dx \right)^{1/2} + \epsilon/2$$

$$\le \left[ \|f - f_k\|_\infty \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| \, dx \right]^{1/2} + \epsilon/2$$

$$\le \left( \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| \, dx \right)^{1/2} + \epsilon/2 \underset{\text{برای } k \text{ به اندازه کافی بزرگ}}{<} \epsilon$$

نتیجه ـ تساوی پارسوال :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

نتیجه ـ اگر $f,g\in R$ آنگاه

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\, d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \langle (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}, (\hat{g}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\rangle$$

اثبات ـ
$$\langle f,g\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle S_N(f), S_N(g)\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n) e_n , \sum_{|n|\le N} \hat{g}(n) e_n\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{|n|\le N\\|m|\le N}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(m)} \langle e_n, e_m\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

مثال ـ $f(\theta)=|\theta|$ روی $[-\pi,\pi]$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}\theta \frac{\sin n\theta}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\cos n\theta}{n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(\theta) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{\text{فرد } |n|} \frac{-2}{\pi n^2} e^{in\theta}$$

تساوی پارسوال:

$$\sum |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 \, d\theta = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{\pi^2} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8 \times 12}$$

تبدیل فوریه :

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \ell^2$$

$$\mathcal{F}(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

یک تبدیل خطی حافظ طول و زاویه است.

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2}$$

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle_{\ell^2}$$

سؤال: آیا تبدیل فوریه پوشا است؟ خیر

مثال زیر در مسأله ۱ کتاب آمده است. برای هر $0<\alpha<1$ هیچ تابع انتگرال‌پذیری وجود ندارد که سری فوریه آن برابر باشد با

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

درحالت $\frac{1}{2} \geq \alpha > 0$ این مطلب واضح است زیرا ضرایب فوریه باید در $\ell^2$ باشند.

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} < \infty \iff 2\alpha > 1$$

مثال- تابع انتگرالپذیر $f$ وجود ندارد که سری فوریه آن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ باشد. یعنی

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \geq 1 \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

واضح است که $\left(\hat{f}(n)\right)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$.

$$A_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{inx}}{n} = (f * P_r)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, P_r(x-y)\, dy$$

$$|A_r(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \cdot P_r(x-y)\, dy \leq \|f\|_\infty$$

درنتیجه $A_r(x)$ برای هر $0 \leq r < 1$ به طور یکنواخت کران دار است. درحالی که در نقطه $x=0$ این اتفاق نمی افتد:

$$A_r(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = -\ln(1-r)$$