آنالیز فوریه

۹۹/۱۲/۹

جلسه پنجم

جمع‌پذیری و میانگین‌های چزارو

به کمک میانگین‌های چزارو می‌توانیم تعریف همگرایی یک دنباله را تعمیم دهیم. اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله باشد،

$$b_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

n-امین میانگین چزارو این دنباله نامیده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به α همگرا باشد، آنگاه

$$b_n \longrightarrow \alpha$$

اما این میانگین‌ها اجازه می‌دهد در مواردی که دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا نباشد، یک تعریف جدیدی از همگرایی به معنای چزارو داشته باشیم.

مثال - $a_n = (-1)^n$ $\Leftarrow$ $b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n} & n \text{ زوج} \end{cases}$ در نتیجه دنباله a_n به معنای چزارو به صفر همگرا است.

می‌توانیم رویکردی مشابه برای سری‌های عددی که همگرا نیست، داشته باشیم. برای سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ مفهوم همگرایی از دنباله مجموع‌های جزئی

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} C_n$$

به دست می‌آید. اگر دنباله $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ به مفهوم چزارو همگرا باشد، گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ جمع‌پذیر چزارو است.

$$\sigma_N = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}}{N} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{N-n}{N} c_n$$

مثال- هرچند سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ واگرا است اما جمع‌پذیر چزارو به $\frac{1}{2}$ است.

$$S_0 = 1 , \ S_1 = 0 , \ S_2 = 1 , \ S_3 = 0$$

$$\sigma_0 = 1 , \ \sigma_1 = 1/2 , \ \sigma_2 = 2/3 , \ \sigma_3 = 1/2 \ \longrightarrow 1/2$$

جمع‌پذیری چزارو سری فوریه :

$$S_N(f)(x) = \sum_{m=-N}^{N} \hat{f}(m)\, e^{imx} = (f * D_N)(x) \,, \qquad D_N(x) = \sum_{m=-N}^{N} e^{imx} = \frac{\sin (N+1/2)x}{\sin x/2}$$

N-امین میانگین چزارو سری فوریه برابر است با :

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N} = (f * F_N)(x)$$

که

$$F_N = \frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}$$

هسته فیجر (Fejer) نامیده می‌شود.

برای بررسی جمع‌پذیری سری فوریه، کافی است نشان دهیم $\{F_N\}$ هسته‌ای خوب است.

لم- $\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ هسته‌ها خوب هستند.

اثبات- شرط اول:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}\,dx$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} 1 = 1$$

شرط دوم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|\,dx \underset{0\le F_N}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,dx = 2\pi$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2} = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

$$2\sin x/2\left(\sin x/2 + \sin 3x/2 + \cdots + \sin (2N-1)x/2\right) = (\cos 0 - \cos x) + (\cos x - \cos 2x) + \cdots + (\cos(N-1)x - \cos Nx)$$

$$= 1 - \cos Nx = 2\sin^2\frac{Nx}{2}$$

شرط سوم:

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi} |F_N(x)|\,dx = \frac{1}{N}\int_{\delta\le|x|\le\pi} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 x/2}\,dx$$

$$\le \frac{2\pi}{N\sin^2\delta/2} \longrightarrow 0$$ برای هر $\delta>0$ ثابت وقتی $N\to\infty$

قضیه - اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر روی دایره باشد و x یک نقطه پیوستگی آن باشد. آنگاه سری فوریه در نقطه x جمع‌پذیر چزارو به $f(x)$ است. اگر f در همه‌جای دایره پیوسته باشد (یا یک تابع پیوسته متناوب روی R)، آنگاه سری فوریه f به طور یکنواخت جمع‌پذیر چزارو به f است.

نتیجه - اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر روی دایره باشد و $\hat{f}(n)=0$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$. آنگاه $f(x)=0$ در هر نقطه پیوستگی x.

اثبات - $S_N(f)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}=0 \Rightarrow \sigma_N(f)(x)=0 \Rightarrow$ اگر x نقطه پیوستگی f باشد بنابر قضیه بالا داریم $f(x)=\lim_{N\to\infty}\sigma_N(f)(x)=0$.

نکته - اگر $f(x)=\begin{cases} f_- & -\pi<x\le 0 \\ f_+ & 0<x\le \pi \end{cases}$ ، هرچند $x=0$ نقطهٔ ناپیوستگی f است ولی

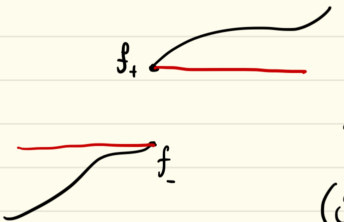
$$(f*F_N)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,F_N(-y)\,dy=\frac{f_-}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}F_N(-y)\,dy+\frac{f_+}{2\pi}\int_{0}^{\pi}F_N(y)\,dy=\frac{f_-+f_+}{2}$$

تعریف - گوییم تابع f در نقطهٔ ناپیوستگی x دارای پرش است، هرگاه

$$\lim_{h\to 0^+} f(x+h)=f(x^+)\neq f(x^-)=\lim_{h\to 0^+} f(x-h)$$

قضیه - اگر تابع انتگرال‌پذیرِ f در نقطهٔ x دارای پرش ناپیوستگی باشد، آنگاه سری فوریهٔ آن در نقطه جمع‌پذیرِ چزارو است به

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$



اثبات - قرار دهید $g(y)=\begin{cases} f_- & x-\pi<y<x \\ f_+ & x+\pi>y>x \end{cases}$ آنگاه تابع $f-g$ در نقطهٔ x پیوسته است و بنابر قضیه

همگرایی چزارو سری فوریه $(f-g)*F_N(x)\longrightarrow f(x)-g(x)=0$ و بنابر مثال بالا $(g*F_N)(x)\longrightarrow\frac{f_++f_-}{2}$

$$\Rightarrow (f*F_N)(x)\longrightarrow\frac{f_++f_-}{2}$$

جمع‌پذیری و میانگین‌های آبلی :

سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ را جمع‌پذیر آبل به مقدار S گوییم ، هرگاه برای هر $0 \leq r < 1$ ، سری

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

همگرا باشد و $\lim_{r \to 1} A(r) = S$.

دقت کنید هرگاه $\{c_n\}$ کران‌دار باشد، $A(r)$ برای هر $0 \leq r < 1$ تعریف می‌شود و تنها شرط همگرایی $\lim_{r \to 1} A(r)$ باید بررسی شود.

مثال - $c_n = 1 \Leftarrow A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ولی $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ جمع‌پذیر آبل نیست.

مثال - $c_n = \frac{1}{n} \Leftarrow A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n} = -\ln(1-r)$ درنتیجه $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ جمع‌پذیر آبل نیست.

جمع‌پذیری آبل قوی‌تر از جمع‌پذیری چزارو است. یعنی اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ جمع‌پذیر چزارو باشد، آنگاه جمع‌پذیر آبل هم است به همان مقدار. (تمرین ۱۳)

مثال - سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ جمع‌پذیر آبل به $1/4$ است ، اما جمع‌پذیر چزارو نیست.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^n = \frac{d}{dr}-\sum(-r)^{n+1} = \frac{d}{dr}\frac{-1}{1+r} = \frac{1}{(1+r)^2}$$

$$S_0=1,\ S_1=-1,\ S_2=2,\ S_3=-1,\ S_4=3,\ \cdots \Rightarrow \sigma_0=1,\ \sigma_1=0,\ \sigma_2=\frac{2}{3},\ \sigma_3=1/4,\ \cdots$$

جمع‌پذیری آبل سری فوریه :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$$

$$A_r(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)r^{|n|}e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iny}\,r^{|n|}e^{inx}\,dy$$

به علت همگرایی یکنواخت سری جابجایی انتگرال با آن مجاز است.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}r^{|n|}e^{in(x-y)}\,dy$$

$$= (f * P_r)(x)$$

هسته پواسون $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}$

لم- $\{P_r\}_{0\le r<1}$ هسته‌ی خوب هستند، هرگاه $r\to 1$.

اثبات- شرط اول:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx}\,dx$$

به دلیل همگرایی یکنواخت مجاز هستیم سری و انتگرال را جابجا کنیم $\longleftarrow$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1$$

شرط دوم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_r(x)|\,dx \underset{P_r\ge 0}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 1$$

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty}(re^{ix})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(re^{-ix})^n - 1 = \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{1}{1-re^{-ix}} - 1$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \ge 0$$

شرط سوم :

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi} |P_r(x)|\,dx = \int_{\delta\le|x|\le\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$$

$$\le 2\pi \times \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \longrightarrow 0$$

برای هر $\delta>0$ ثابت وقتی $r\to 1^-$.

قضیه - اگر f روی دایره انتگرال‌پذیر باشد، سری فوریه آن در هر نقطه پیوستگی تابع، جمع‌پذیر آبل است. اگر f همه جا پیوسته باشد آنگاه سری فوریه به طور یکنواخت جمع‌پذیر آبل به f است.

گزاره - اگر f در نقطه x دارای پرش ناپیوستگی باشد، سری فوریه آن جمع‌پذیر آبل به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ است.

اثبات - هر چند جمع‌پذیری آبل قوی‌تر از چزارو است و از جمع‌پذیری چزارو این مطلب نتیجه می‌شود، اما به طور مستقل هم به آن این مطلب اثبات می‌کنیم.

زیرا هسته پواسون یک تابع زوج است و $\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \int_0^{\pi} P_r(x)\,dx = \pi$

کاربرد در حل معادله لاپلاس :

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & \text{for} \quad r<1 \\ u = f & \text{for} \quad r=1 \end{cases}$$

اگر u جواب این مسأله باشد و سری فوریه آن برای هر $r<1$ ثابت به صورت $u(r,\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta}$ باشد

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

چون u یک تابع مشتق پذیر با مشتقات پیوسته است، بنابراین از معادله $\Delta u=0$ نتیجه می شود :

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right] e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= a_n'' + \frac{1}{r}a_n' + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} e^{-in\theta}\right]_{\theta=-\pi}^{\pi}}}_{0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}(-in)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

← جابجایی $\frac{\partial}{\partial r}$ و انتگرال مجاز است زیرا $\frac{\partial u}{\partial r}$ انتگرال پذیر است.

$$= a_n'' + \frac{1}{r}a_n' + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{in}{r^2}\, u\, e^{-in\theta}\right]_{\theta=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-(in)^2}{r^2}\, u\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$= a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n$$

$$r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0 \Rightarrow a_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}$$

چون u یک تابع پیوسته و کران دار است، بنابراین باید $a_n(r)$ برای $r<1$ کران دار باشد. در نتیجه $\beta_n = 0$ برای $n>0$

و $\alpha_n = 0$ برای $n<0$. به طور خلاصه می نویسیم: (وقتی $n=0$ داریم $a_0(r) = \alpha_0 + \beta_0 \ln r$ که باید $\beta_0 = 0$)

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

دقت کنید محاسبات بالا نشان داد هر جواب $\Delta u = 0$ در داخل دایره به شعاع یک جوابی به صورت بالا دارد. این رابطه اطلاعی از ضرایب c_n به ما نمی دهد. اما برای هر دنباله کران دار $\{c_n\}$ تابع $u(r,\theta)$ با ضابطه بالا در معادله لاپلاس $\Delta u = 0$ در $r<1$ صدق می کند.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n r^{|n|-1} e^{in\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(|n|-1) c_n r^{|n|-2} e^{in\theta} \qquad \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

اکنون اگر از شرط مرزی $u=f$ برای $r=1$ استفاده کنیم، یک کاندید مناسب برای ضرایب c_n عبارتست از

$$c_n = \hat{f}(n)$$

$$\Rightarrow \qquad u(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, r^{|n|} e^{in\theta} = (f * P_r)(\theta)$$

بنابر خاصیت جمع‌پذیری آبل سری فوریه می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$(*) \qquad \lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f(\theta)$$

اگر f در نقطه θ پیوسته باشد

سؤال: آیا به غیراز $c_n = \hat{f}(n)$ جواب دیگری برای مسأله وجود دارد که شرط مرزی را به معنای $(*)$ برآورده کند؟

پاسخ: بله، تمرین ۱۸ کتاب نشان داده می‌شود که $u(r,\theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$ یک جواب مسأله است که رابطه $(*)$ برای $f=0$ برآورده می‌شود.

با این وجود اگر در رابطه $(*)$ همگرایی را یکنواخت فرض کنیم برای توابع پیوسته f یکتایی جواب برقرار است.

اگر $\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = f(\theta)$ بطور یکنواخت باشد، بنابر تعریف ضرایب فوریه u داشتیم:

$$c_n r^{|n|} = a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r,\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

همگرایی یکنواخت اجازه می‌دهد که حد و انتگرال را جابجا کنیم. در نتیجه باید

$$c_n = \lim_{r\to 1^-} a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \hat{f}(n)$$