آنالیز فوریه

جلسه چهارم

۹۹/۱۲/۴

قضیه- فرض کنید h یک تابع انتگرال‌پذیر روی دایره باشد که $\hat{h}(n)=0$ برای هر $n\in\mathbb{Z}$. آنگاه $h(\theta_0)=0$

اگر h در نقطه θ_0 پیوسته باشد.

اثبات- برای سادگی $\ell=\pi$ می‌گیریم و همچنین می‌توان فرض کرد $\theta_0=0$. زیرا

$$g(\theta):=h(\theta+\theta_0) \Rightarrow \hat{g}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)e^{-in\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta+\theta_0)e^{-in\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\theta_0}^{\pi+\theta_0} h(\theta)e^{-in(\theta-\theta_0)}d\theta$$

$$=\frac{e^{in\theta_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)e^{-in\theta}d\theta=e^{in\theta_0}\hat{h}(n)=0$$

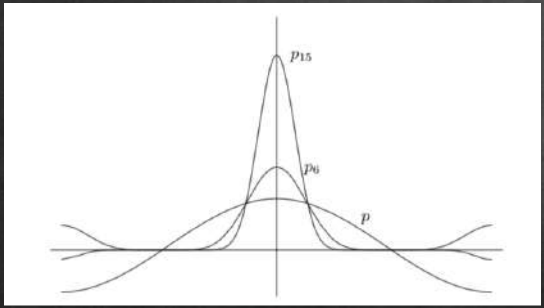
ابتدا فرض می‌کنیم h یک تابع حقیقی است. در نتیجه

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\cos n\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\sin n\theta\, d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, P(\theta)\, d\theta = 0 , \qquad P(\theta) = q(\cos\theta) \ \text{یا}\ q(\sin\theta)$$

q یک چندجمله‌ای است.

ایده اثبات: اگر چندجمله‌ای‌های مثلثی $P_k(\theta) = (\epsilon + \cos\theta)^k$ را در رابطه بالا وارد دهیم. برای k بزرگ $P_k(\theta)$ مانند یک پیک (دلتای دیراک) در نقطه $\theta = 0$ عمل کند. در این صورت انتگرال بالا تقریباً برابر $h(0)$ خواهد بود.



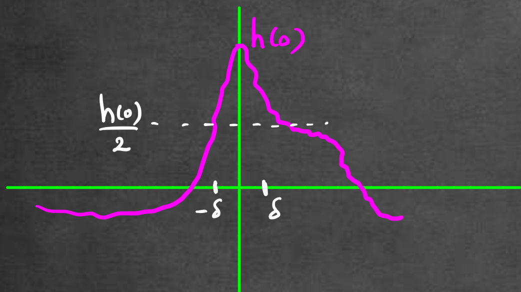
$$P(\theta) = \epsilon + \cos\theta , \quad P_k(\theta) = [P(\theta)]^k$$

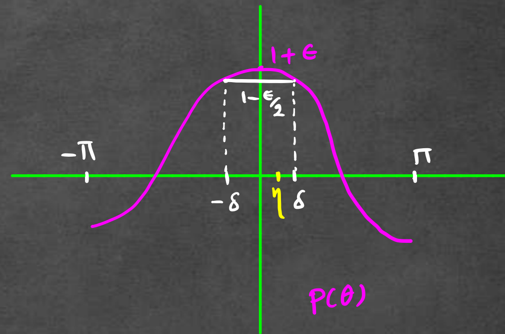
فرض کنید $0 \neq h(0) > 0$. مقدار $\delta > 0$ وجود دارد که $h(\theta) > \frac{h(0)}{2}$ برای $|\theta| < \delta$.

$\epsilon > 0$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید که

$|P(\theta)| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$ برای $\delta \leq |\theta| \leq \pi$

(کافی است $P(\delta) \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$)





$\eta < \delta$ انتخاب کنید که $1 + \frac{\epsilon}{2} \leq P(\theta) \leq 1 + \epsilon$ برای $|\theta| \leq \eta$.

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\, P_k(\theta)\, d\theta = \int_{|\theta|\le\eta} \cdots + \int_{\eta\le|\theta|\le\delta} \cdots + \int_{\delta\le|\theta|\le\pi} \cdots =: I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_3| \le \int_{\delta\le|\theta|\le\pi} |h(\theta)|\, |P(\theta)|^k\, d\theta \le 2\pi \|h\|_\infty \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^k$$

برای مقادیرِ به اندازه کافی بزرگ k ، مقدار I_3 به اندازهٔ دلخواه کوچک می‌شود.

$$I_2 = \int_{\eta\le|\theta|\le\delta} h(\theta)\, (\epsilon+\cos\theta)^k\, d\theta \ge 0$$

$$I_1 = \int_{|\theta|\le\eta} h(\theta)\, (P(\theta))^k\, d\theta \ge 2\eta\, \frac{h(0)}{2} \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^k$$

برای k به اندازه کافی بزرگ $I_1+I_2+I_3>0$ که تناقض است.

اگر f یک تابع مختلط باشد و $f(\theta) = u(\theta) + i\,v(\theta)$ که u, v توابع حقیقی هستند.

$$u(\theta) = \frac{f(\theta) + \overline{f(\theta)}}{2} \quad , \quad v(\theta) = \frac{f(\theta) - \overline{f(\theta)}}{2i}$$

ضرایب فوریه $\bar{f}(\theta) = \overline{f(\theta)}$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\hat{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)}\, e^{-in\theta}\, d\theta = \overline{\hat{f}(-n)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}(n) = \hat{v}(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\theta_0) = v(\theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\theta_0) = 0$$

تمرین - تمرینهای ۱ تا ۱۰ فصل دوم کتاب.

پیچش (Convolution)

اگر f و g دو تابع 2π-متناوب و انتگرال‌پذیر باشند، پیچش آن دو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

دقت کنید برای هر x ثابت انتگرال بالا تعریف شده است.

اهمیت پیچش در آنالیز فوریه:

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy\right) e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)}\, dy = (f*D_N)(x)$$

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

هسته دیریکله

خواص پیچش :

$$f * g = g * f \quad ①$$

$$(g*f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, f(\underbrace{x-y}_{Y})\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} g(x-Y)\, f(Y)\, (-dY)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Y)\, g(x-Y)\, dY = (f*g)(x)$$

$$f*(g+h) = f*g + f*h \quad ②$$

$$(cf)*g = c(f*g) \quad ③$$

$$(f*g)*h = f*(g*h) \quad ④$$

$$((f*g)*h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(y)\, h(x-y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\, g(y-z)\, h(x-y)\, dz\, dy = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(z) \int_{-\pi}^{\pi} g(\underbrace{y-z}_{Y})\, h(\underbrace{x-y}_{x-Y-z})\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\, (g*h)(x-z)\, dz = (f*(g*h))(x)$$

$$\widehat{(f*g)}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n) \qquad ۵$$

$$\widehat{(f*g)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x-y)\,e^{-inx}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} g(\underbrace{x-y}_{X})\,e^{-inx}\,dx\,dy = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} g(X)\,e^{-inX}\,e^{-iny}\,dX\,dy$$

$$= \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$$

۶ $f*g$ پیوسته است.

$$(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[g(x_1-y)-g(x_2-y)\right]dy$$

حالت اول : g پیوسته است ⇐ پیوسته یکنواخت است ⇐

$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0$ s.t. $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |g(x_1-y)-g(x_2-y)|<\epsilon$

$$\Rightarrow \left|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)\right| \le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy$$

حالت دوم: f و g هیچکدام پیوسته نباشند.

$$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)\,[g(x_1-y)-g(x_2-y)]|\,dy$$

$$\le \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x_1-y)-g(x_2-y)|\,dy$$

لم ـ اگر h در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه دنباله توابع پیوسته h_k وجود دارند که

$$\int_a^b |h_k(x)-h(x)|\,dx \to 0$$

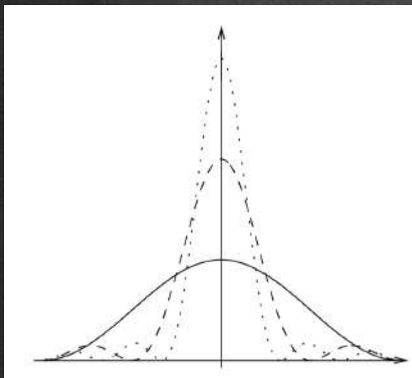
به‌علاوه اگر $|h(x)|\le M$ می‌توان فرض کرد که دنباله توابع h_k نیز در رابطه $|h_k(x)|\le M$ صدق می‌کند.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x_1-y)-g(x_2-y)|\,dy \le \int_{-\pi}^{\pi} |g(x_1-y)-g_k(x_1-y)|\,dy + \int_{-\pi}^{\pi} |g_k(x_1-y)-g_k(x_2-y)|\,dy$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} |g_k(x_2-y)-g(x_2-y)|\,dy = I_1+I_2+I_3$$

برای ϵ دلخواه، K به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $I_1, I_3 < \epsilon$.

برای مقدار ثابت K، $\delta > 0$ وجود دارد که $I_2 < \epsilon$ وقتی $|x_1 - x_2| < \delta$.



هسته‌های خوب :

دنباله توابع $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ را هسته‌ها خوب گوییم هرگاه

(۱) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$$

(2) ثابت M وجود دارد که برای هر n داشته باشیم

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\,dx \leq M$$

(3) برای هر $\delta > 0$،

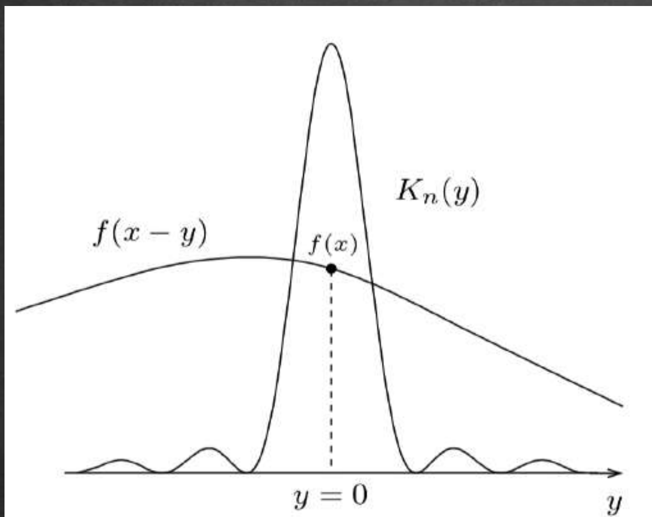
$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty \text{ وقتی}} 0$$

قضیه- فرض کنید $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ هسته‌های خوب باشند و f یک انتگرال‌پذیر روی دایره. آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(f*K_n)(x) = f(x)$$

هرگاه f در نقطه x پیوسته باشد. اگر f همه‌جا پیوسته باشد، آنگاه همگرایی یکنواخت است.

نکته- به دلیل قضیه بالا از هسته‌های خوب به عنوان تقریب همانی نیز نام برده می‌شود.



اثبات -

$$(f * K_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,[f(x-y) - f(x)]\,dy$$

تعریف پیچش و خاصیت ۱ هسته‌ی خوب.

اگر f در x پیوسته باشد:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta \text{ sth. } |y| < \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\cdot|f(x-y) - f(x)|\,dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)|\cdot|f(x-y) - f(x)|\,dy$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\pi}\underbrace{\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\,dy}_{\leq \frac{\epsilon M}{2\pi}} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)|\,dy}_{\text{بنابر خاصیت ۳ به صفر همگرا است.}}$$

وقتی $n \to \infty$ بنابر خاصیت 3 هسته‌ای خوب جمله دوم به صفر همگرا می‌شود.

جمله اول بنابر خاصیت 2 هسته‌ای خوب کمتر از $\frac{M\epsilon}{2\pi}$ است. در نتیجه

$$\limsup_{n \to \infty} \left| (f * K_n)(x) - f(x) \right| \leq \frac{M\epsilon}{2\pi}$$

و چون ϵ دلخواه است، پس حد بالا صفر است.

اگر f همه جا پیوسته باشد، پیوسته یکنواخت است و مقدار δ مستقل از x انتخاب می‌شود. در نتیجه

همگرایی بالا یکنواخت خواهد بود.

نکته - متأسفانه $\{D_N\}$ هسته‌ها خوب نیستند.

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx}\,\frac{\left[e^{i(2N+1)x} - 1\right]}{e^{ix} - 1}$$

$$= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\,dx = 1$$

خاصیت ۲ هسته‌ای خوب برقرار نیست.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2} \right| dx \geq 2\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin(N+1/2)x|}{x/2}\,dx$$

$$= 4\int_{0}^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin y|}{\cancel{y}/(N+1/2)} \frac{dy}{N+1/2} = 4\int_{0}^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin y|}{y}\,dy$$

$$\geq 4\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin y|}{y}\,dy \geq 4\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin y|\,dy$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty$$