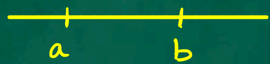
آنالیز فوریه

جلسه دوم ۹۹/۱۱/۲۷

معادله گرما



تعریف: $u(x,t)$ دما نقطه x در لحظه t

یا چگالی یک ماده در نقطه در نظر می‌گیرم.

انرژی گرمایی در بازه $[a,b]$ $= H(t) = \sigma \int_a^b u(x,t)\, dx$

شاخص گرمایی

نرخ تغییرات انرژی $\quad \frac{\partial H}{\partial t} = \sigma \int_a^b \partial_t u(x,t)\, dx$

جریان گرمایی در نقطه x $= J(x,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = J(a,t) - J(b,t)$

قانون Fick: جریان گرمایی از نقاط با دمای بالا به سمت نقاط با دمای پایین و متناسب با اختلاف دما است.

$$J(x,t) \sim -\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma\int_a^b \partial_t u(x,t)\,dx = J(a,t) - J(b,t) = K\left(\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a,t)\right)$$

a,b دلخواه است $\Rightarrow$

$$\partial_t u(x,t) = \frac{K}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

مسأله گرما با شرایط مرزی و اولیه

$$\begin{cases} \partial_t u = c^2 \partial_x^2 u & 0<x<\ell\ ,\ 0<t \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

روش جداسازی متغیرها :

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x)\psi(t) \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x)\psi'(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t) \Rightarrow \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{c^2\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

تنها برای $\lambda = -\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2$ وقتی $m=1,2,\dots$ جواب غیربدیهی وجود دارد و

$$u_m(x,t) = e^{-\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$$

انتظار داریم

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$$

جواب معادله گرما باشد.

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$$

تذکر- اگر مجموع بالا متناهی باشد، به طور بدیهی در معادله صدق می کند ولی برای مجموع نامتناهی تابع احتیاج است که این مطلب بررسی شود.

محاسبهٔ ضرایبِ A_m با فرض $\ell=\pi$

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx = \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx \sin nx \, dx$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\pi}{2} A_n$$

← با فرض مجاز بودنِ جابجایی انتگرال و مجموع

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

جمع‌بندی :

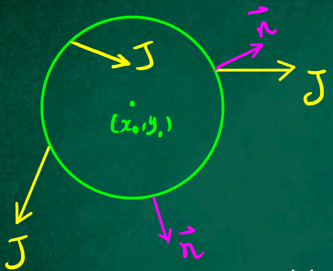
با محاسبات قبلی کاندید جواب به صورت زیر است

هرچند اثبات اینکه $u(x,t)$ جواب است احتیاج به نظریه آنالیز فوریه دارد.

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2 t}\sin\frac{m\pi x}{l}$$

معادله گرما در بعد دو :



محاسبات بالا را در یک دایره به شعاع r به مرکز (x_0,y_0) تکرار می‌کنیم

$$H(t) = \sigma \iint_S u(x,y,t)\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sigma \iint_S \partial_t u(x,y,t)\,dx\,dy = -\int_{\partial S} J \cdot \vec{n}\,d\sigma = -\iint_S \operatorname{div} J\,dx\,dy$$

چون دایره S دلخواه است $\Rightarrow$

$$\sigma\,\partial_t u(x,y,t) = -\operatorname{div} J\,(x,y,t)$$

$$J = -k\nabla u \implies \partial_t u = \frac{k}{\sigma}\Delta u = \frac{k}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

حالت تعادل $(\partial_t u = 0)$ $\Delta u = 0 \longrightarrow$ تابع هارمونیک

مسأله دیریکله $\longleftarrow$
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D = \{(x,y) : x^2+y^2<1\} \\ u = f & \text{on } \partial D = \{(x,y) : x^2+y^2=1\} \end{cases}$$

تغییر متغیر به مختصات قطبی :

$$\begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \theta = \tan^{-1} y/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 & r<1 ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(1,\theta) = f(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$u(r,\theta)$ نسبت به θ تناوبی با دوره تناوب 2π است. یا $u(r,0) = u(r,2\pi)$

روش جداسازی متغیرها :

$$u(r,\theta) = F(r)\,G(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = \left(F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)\right)G(\theta) + \frac{1}{r^2}F(r)\,G''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^2F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G''(\theta) + \lambda G(\theta) = 0 \,, \quad G(0) = G(2\pi) \\ r^2F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \end{cases}$$

معادله بالاتنها برای $\lambda = m^2$ جواب غیربدیهی $G(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta$ دارد. متناظر آن

برای $m>0$ $F_m(r) = c_1 r^m + c_2 r^{-m}$ و $F_0(r) = c_1 + c_2 \log r$

$u_m(r,\theta) = F_m(r)\,G_m(\theta)$ تنها درصورتی در دیسک D مشتق‌پذیر است که $c_2 = 0$.

$$u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} r^m \left(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta \right)$$

$$\Rightarrow \quad f(\theta) = u(1,\theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta + B_m \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta$$

$$= A_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \begin{cases} 2\pi A_n & n = 0 \\ \pi A_n & n \ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad n \ge 1 \,, \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

سری فوریه

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta \quad m=0,1,2,\dots \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta$$

فرم مختلط سری فوریه

$$\sin m\theta = \frac{e^{im\theta} - e^{-im\theta}}{2i}$$

$$\cos m\theta = \frac{e^{im\theta} + e^{-im\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{im\theta} \quad \Rightarrow \quad C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi C_n$$