آنالیز فوریه

جلسه اول

۹۹/۱۱/۲۵

پیدایش سری فوریه

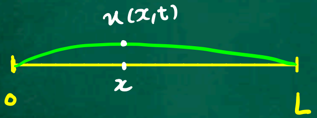
- طرح ایده اولیه توسط برنولی در 1753 برای حل معادله موج
- فوریه ۱۸۰۷ در مقاله نظریه تحلیلی گرما اثباتی برای نمایش کلاسی از توابع ارائه کرد.
- دیریکله در ۱۸۲۹ اثبات همگرایی سری فوریه را ارائه کرد.

«بررسی دقیق طبیعت پربارترین منبع اکتشافات ریاضیات است.» «معادله‌های تحلیلی را می‌توان برای همهٔ پدیده‌های عمومی به‌کار برد. زبانی ساده‌تر، فراگیرتر، کم‌خطاتر و تواناتر از این زبان برای بیان روابط پایدار بین اجسام طبیعی وجود ندارد.» «از این منظر، آنالیز ریاضی وسعتی به اندازهٔ خودِ طبیعت دارد. ویژگی اصلی‌اش بیان روشن آن است. در آن، نشانی از مفاهیم مبهم نیست. پدیده‌های بسیار متفاوتی را به یکدیگر مربوط می‌سازد و شباهت‌های پنهان آنها را آشکار و بدین وسیله آنها را قابل فهم و اندازه‌گیری می‌کند. گویا آنالیز ریاضی، قابلیتی از ذهن آدمی است تا جبرانی باشد برای کوتاهی عمر و نقص حواس انسان.»

جملاتی از مقدمه مقاله فوریه (میراث فوریه، فرهنگ و اندیشه ریاضی ۱۳۹۵)

معادله موج (تار مرتعش)

یک تار (سیم) که دو طرف آن ثابت شده است، بر اثر کشیده شدن دچار نوسان می‌شود.



فرض می‌کنیم این حرکت تنها عمودی است و هر نقطه x روی این تار

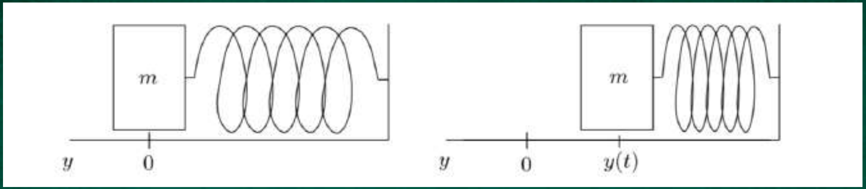
در جای خودش بالا و پایین می‌رود. اگر در زمان t به میزان $u(x,t)$

انحراف از جای اصلی نقطه x را نشان دهد، هدف نوشتن یک معادله برای تابع $u(x,t)$ است.

ایده: این تار را به صورت مجموعه‌ای از فنر در نظر بگیریم که این فنرها برای فشرده شدن یا کشیدن تغییر شکل

می‌دهند.

معادله فنر :



قانون دوم نیوتن :

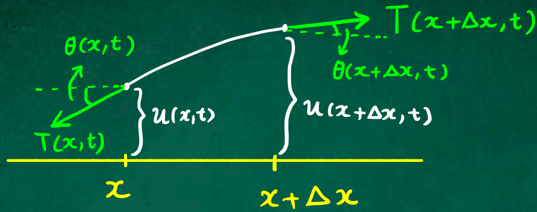
$$-K\,y(t) = m\,y''(t)$$

ضریب فنر

$$c=\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow y''+c^2y=0 \Rightarrow y(t)=a\cos ct+b\sin ct$$

$$y(t)=y(0)\cos ct+\frac{y'(0)}{c}\sin ct$$

معادله موج



نیروی کشش در راستای افقی $= |T(x+\Delta x,t)| \cos\theta(x+\Delta x,t) - |T(x,t)| \cos\theta(x,t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big[\, |T(x,t)| \cos\theta(x,t) \,\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \quad |T(x,t)| \cos\theta(x,t) = \tau(t)$$

مؤلفه عمودی نیروی کشش $= |T(x+\Delta x,t)| \sin\theta(x+\Delta x,t) - |T(x,t)| \sin\theta(x,t)$

$$= \underbrace{\rho(x)}_{\text{چگالی}} \cdot \Delta x \; \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)}_{\text{شتاب عمودی}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[|T(x,t)| \sin\theta(x,t)\Big]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau(t) \tan\theta(x,t)\Big]$$

از طرفی

$$\tan\theta(x,t) = \frac{\Delta u}{\Delta x} \simeq \partial_x u$$

$$\Rightarrow \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le L$$

تغییر متغیر: $U(X,T) = u(x,t)$ ، $t = bT$ ، $x = aX$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \times a \qquad \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial t} \times b$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \qquad 0 \le X \le \pi$$

کافی است $\frac{a}{b} = c$ ، $a = \frac{L}{\pi}$.

روش دالامبر

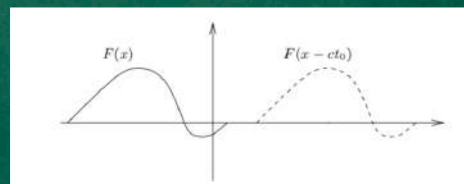
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \pi$$

$u(x,t) = F(x+t)$ جواب معادله است.

$u(x,t) = G(x-t)$ جواب معادله است.

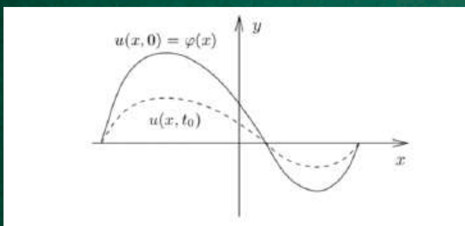
$\Leftarrow$ $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$ جواب است.

موج های رونده :



$u(x,t) = F(x-ct)$

موج ها ایستا :



$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$

دالامبر نشان داد همه جوابهای معادله موج بصورت جمع دو موج رونده است.

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

$$\xi = x+t, \quad \eta = x-t \quad , \quad v(\xi,\eta) = u(x,t)$$

$$x = \frac{\xi+\eta}{2}$$
$$t = \frac{\xi-\eta}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot \cancelto{1/2}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot \cancelto{1/2}{\frac{\partial t}{\partial \xi}} \qquad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \xi} = C_1(\xi) \Longrightarrow v(\xi,\eta) = \int C_1(\xi)\,d\xi + C_2(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

بررسی شرایط اولیه :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = F(x) + G(x) \\ g(x) = F'(x) - G'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) - G(x) = C_1 + \int_0^x g(y)\,dy \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2}\int_0^x g(y)\,dy$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2}\int_0^x g(y)\,dy \qquad 0 \le x \le \pi$$

فرمول دالامبر $\rightarrow$

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t) \right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy$$

نکته : این رابطه برای $0 \le x \pm t \le \pi$ برقرار است . در اسلاید بعد خواهیم دید که چگونه برای هر (x,t) دلخواه تعمیم داده می‌شود.

بررسی شرایط مرزی $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(t) + G(-t) = 0$$

در اسلاید قبل ضابطه F و G در دامنه $[0,\pi]$ به دست آمد. رابطه بالا ضابطه G را در $[-\pi,0]$ توسعه می‌دهد.

اگر $\pi \le t \le 0$ انتخاب کنیم،

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow F(\pi+t) + G(\pi-t) = 0 \Rightarrow$$

ضابطه F را در $[\pi,2\pi]$ می‌دهد.

با ترکیب عبارت اول می‌توان دوباره مقدار G را روی $[-2\pi,-\pi]$ به دست آورد و به همین ترتیب با یک روش استقرایی ضابطه F

روی $[0,\infty)$ و ضابطه G روی $(-\infty,\pi]$ به دست می‌آید.

برای پیدا کردن فرمول صریح جواب، تابع $u(x,t)$ را به یک تابع فرد در بازه $[-\pi,\pi]$ توسعه دهید و سپس به عنوان یک تابع

تناوبی با دوره تناوب 2π در نظر بگیرید. همین‌طور توابع f و g. (بررسی کنید که u برای هر $x \in \mathbb{R}$ در معادله موج صدق می‌کند.)

در نتیجه می‌توان فرمول دالامبر صفحه قبل را برای هر (x,t) دلخواه نوشت با این تذکر که f و g توابع توسعه یافته (به شکل بالا) هستند.

روش جداسازی متغیرها

به کارگیری موج‌های ایستا : $u(x,t)=\varphi(x)\psi(t)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x)\psi''(t)=\varphi''(x)\psi(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\psi''(t)}{\psi(t)}=\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi''(t)-\lambda\psi(t)=0 \\ \varphi''(x)-\lambda\varphi(x)=0 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی باید $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$ و به راحتی می‌توان دید که اگر $\lambda\geq 0$ تنها جواب $\varphi\equiv 0$.

و اگر $\lambda=-\mu^2<0$ آنگاه $\varphi(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$ و با اعمال شرایط مرزی باید $\mu=m$ یک عدد صحیح باشد.

$$u(x,t)=(A\cos mt+B\sin mt)\sin mx \qquad m=1,2,3,\dots$$

همه توابع $u_m(x,t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx$ جواب معادله موج هستند که در شرایط مرزی $u_m(0,t) = u_m(\pi,t) = 0$ صدق می‌کنند.

می‌توان انتظار داشت که جمع آنها نیز جواب باشد.

کاندید جواب :

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx \tag{1}$$

بررسی شرایط اولیه :

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx \tag{2}$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, B_m \sin mx \tag{3}$$

عبارت بالا سری فوریه سینوسی در بازه $[0,\pi]$ است. سؤالات زیر جهت حل معادله موج اساسی هستند.

(ii) چه توابعی را می‌توان به صورت یک سری سینوسی نمایش داد؟ در این صورت ضرایب A_m چگونه محاسبه می‌شوند؟

(iii) تساوی یا نمایش سری فوریه چه معنایی دارد؟ سمت راست تساوی یک سری از توابع است که می‌تواند به معانی مختلف به تابع f همگرا شود. مثلاً همگرایی نقطه‌ای یا همگرایی یکنواخت یا همگرایی در نرم.

(iiii) آیا جابجایی مشتق و سری در محاسبه رابطه (3) مجاز است؟ یا تحت چه شرایطی می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

(iv) با فرض درستی محاسبه ضرایب A_m و B_m در روابط (2) و (3) آیا جواب $u(x,t)$ در رابطه (1) در معادله صدق می‌کند؟ آیا روابط زیر صحیح هستند؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A_m \cos mt + B_m \sin mt\right) \sin mx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos mt + B_m \sin mt\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin mx\right)$$