به نام او

امتحان میان ترم درس آنالیز فوریه و کاربردهای آن

وقت امتحان: ۳ ساعت　　　　۱۴۰۰/۲/۹

سؤال اول: برای هر عدد صحیح $k \geq 1$ و تابع $f \in C^k(S^1)$ ثابت کنید مجموعهای جزیی

$$S_N(\theta) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n\theta}$$

به طور یکنواخت به تابع f همگرا هستند و

$$\|S_N - f\|_\infty = O(N^{-k+\frac{1}{2}}).$$

سؤال دوم: ثابت کنید برای هر $f \in L^2(S^1)$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}) = \hat{f}(0) = \int_0^1 f(\theta) d\theta,$$

که منظور از حد بالا همگرایی در $L^2(S^1)$ است.

سؤال سوم: برای هر بازه $I = [a, b]$ و تابع $f \in C^1(I)$ که $f(a) = f(b) = 0$ ثابت کنید

$$\int_I |f(x)|^2 \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_I |f'(x)|^2 \, dx.$$

به علاوه تابع f را پیدا کنید که برای آن تساوی برقرار باشد.

سؤال چهارم: برای $f \in \mathcal{S}(0, \infty)$ تعریف کنید

$$Af(\omega) := 2 \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi\omega x) \, dx,$$

و تساوی زیر را ثابت کنید

$$f(x) = 2 \int_0^\infty Af(\omega) \cos(2\pi\omega x) \, d\omega.$$

سؤال پنجم: سری فوریه تابع $f(\theta) = |\sin\theta|$ را به صورت یک تابع تناوبی با دوره π محاسبه کرده و به کمک آن مقدار سری عددی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴n^۲ - ۱}$$

را به دست آورید.

سؤال ششم: برای هر تابع $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ثابت کنید

$$\lim_{b\to\infty} \frac{۱}{b} \int_۰^b \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) e^{۲\pi i\omega x} d\omega\, da = f(x).$$

این رابطه نسخه معادل همگرایی چزارو برای تبدیل فوریه است. (راهنمایی: سعی کنید عبارت سمت چپ را به صورت کانولوشن یک تابع با f در بیارید.)

موفق باشید.