به نام او

امتحان پایان ترم درس آنالیز فوریه و کاربردهای آن

وقت امتحان: **۳** ساعت **۱۴۰۰/۴/۲**

سؤال اول: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نشان دهید تکیه‌گاه (support) هر دو تابع f و $\hat{f}$ نمی‌توانند همزمان فشرده باشند، مگر اینکه $f \equiv 0$ تابع ثابت صفر باشد.

سؤال دوم: معادله لاپلاس در نیم فضای $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^d, y > 0\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

که شرط مرزی $u(x,0) = f(x)$ نیز فرض می‌شود. به کمک تبدیل فوریه نشان دهید جواب این معادله به صورت $u(x,y) = (f * P_y^d)(x)$ است که

$$P_y^d(x) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}.$$

سؤال سوم: اگر G یک گروه آبلی متناهی و f یک تابع دلخواه روی آن، ثابت کنید

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \sum_{e \in \hat{G}} |\hat{f}(e)|^2.$$

سؤال چهارم: فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی و e یک مشخصه روی آن باشد. اگر H یک زیرگروه G باشد، مقدار

$$\sum_{h \in H} e(h)$$

را به دست آورید.

سؤال پنجم: دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط را در نظر بگیرید که به پیمانه q تناوبی است. یعنی $a_m = a_n$ هرگاه $n = m \mod q$. نشان دهید:

الف- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{q} a_n = 0$.

ب- اگر

$$A(m) = \sum_{n=1}^{q} a_n \omega^{-mn}, \qquad E(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

که $\omega = e^{2\pi i/q}$، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q-1} A(m) E(2\pi m/q)$$

موفق باشید.