کنترل بهینه

جلسه ۷ ٩٩,٨,٣

مسأله چهارم:

$$D = \{ x : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n \ : \ x(a) = x_0 \}$$

$$J(b, x) = \int_a^b \ell(t, x, \dot{x})\, dt + \varphi(b, x(b))$$

شرط لازم بهینگیِ مسأله

$$\min_{\substack{x \in D \\ a < b}} J(b, x)$$

$$FC(x^*) = \{ \xi \in C^1[a, \infty) : \xi(a) = 0 \}$$

$$\frac{d}{d\theta} J(b + \theta c, x^* + \theta \xi) \Big|_{\theta = 0} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \int_a^{b+\theta c} \ell(t, x^* + \theta \xi, \dot{x}^* + \theta \dot{\xi})\, dt + \varphi\big(b + \theta c, x^*(b + \theta c) + \theta \xi(b + \theta c)\big) \Big|_{\theta = 0}$$

$$= c\, \ell(b, x^*(b), \dot{x}^*(b)) + \int_a^b \nabla_x \ell + \nabla_p \ell \cdot \dot{\xi}\, dt$$

$$+ c\,\varphi_t(b, x^*(b)) + \nabla_x \varphi \cdot \left[c\dot{x}^*(b) + \xi(b)\right]$$

$$= c\left[\ell + \varphi_t - \nabla_p \ell \cdot \dot{x}^*\right]\Big|_{t=b} + \int_a^b \left[\nabla_x \ell - \frac{d}{dt}\nabla_p \ell\right]\xi\, dt$$

$$+ \left[\nabla_x \varphi + \nabla_p \ell\right] \cdot \left[\xi(b) + c\dot{x}^*(b)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla_x \ell - \frac{d}{dt}\nabla_p \ell = 0$$

معادله اویلر لاگرانژ

$$\begin{cases} \ell + \varphi_t - \nabla_p \ell \cdot \dot{x}^* \Big|_{t=b} = 0 \\ \nabla_x \varphi + \nabla_p \ell \Big|_{t=b} = 0 \end{cases}$$

جمع‌بندی شروط لازم

معادله اویلر لاگرانژ: $\nabla_x l = \frac{d}{dt} \nabla_p l$

شرط مرزی $x(a) = x_0$

• شرط مرزی $x(b) = x_1$

- اگر t آزاد باشد $l + \varphi_t - \dot{x} \cdot \nabla_p l \Big|_{t=b} = 0$

- اگر $x(b)$ آزاد باشد $\nabla_p l + \nabla_x \varphi \Big|_{t=b} = 0$

شرط لازم مرتبه دوم: ماتریس $\nabla_p^2 l$ نیمه‌معین مثبت است.

مثال -

$$J(x) = \int_0^{\pi/4} x_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2 \, dt$$

$$x_1(0) = 1 \ , \ x_2(0) = 3/2$$

$x_1(\pi/4) \ , \ x_2(\pi/4)$ آزاد باشند.

$$l(x_1, x_2, p_1, p_2) = x_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2$$

معادله اویلر لاگرانژ : $\partial_{x_i} l = \frac{d}{dt} \partial_{p_i} l \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = \frac{d}{dt} \dot{x}_2 \\ 0 = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x}_1 + 4x_1 = 0$

$$x_1(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

شرط مرزی $\begin{cases} x_1(0) = 1 \ , \ x_2(0) = 3/2 \longrightarrow c_1 = 1 \\ \nabla_p l \Big|_{t=\pi/4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(\pi/4) = 0 \\ \dot{x}_1(\frac{\pi}{4}) + 2\dot{x}_2(\pi/4) = 0 \end{cases} \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$c_2 = 0$$

جواب ندارد.

اگر $x_1(\pi/4)=2$ و $x_2(\pi/4)$ آزاد باشد.

شرایط مرزی
$$\begin{cases} x_1(0)=1, \quad x_1(\pi/4)=2 \\ x_2(0)=3/2, \quad \dot{x}_1(\pi/4)+2\dot{x}_2(\pi/4)=0 \end{cases}$$

$$x_1(t)=c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t \longrightarrow c_1=1, \; c_2=2$$

$$x_1(t)=\cos 2t + 2\sin 2t$$

$$\dot{x}_2=-\tfrac{1}{2}\dot{x}_1=\sin 2t-2\cos 2t$$

$$\Rightarrow x_2(t)=-\tfrac{1}{2}\cos 2t-\sin 2t+c_3$$

$$c_3-1/2=3/2,$$

$$\dot{x}_1(\pi/4)=-2, \quad \dot{x}_2(\pi/4)=1$$

جواب‌های ایستای قطعه‌قطعه هموار

مثال

$$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(t)\,(1-\dot{x}(t))^2\,dt$$

$$x(-1)=0\,,\qquad x(1)=1$$

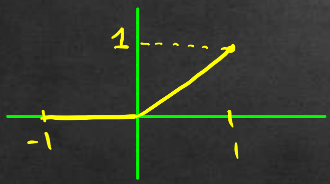
$$2x(1-\dot{x})^2 = \frac{d}{dt}\left(2x^2(\dot{x}-1)\right)$$

$$x(1-\dot{x})^2 = 2x\dot{x}(\dot{x}-1) + x^2\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(x^2(1-\dot{x}^2)\right) = 0 \Rightarrow x^2(1-\dot{x}^2) = c$$

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{u}}{2x} \Rightarrow \dot{u}^2 = 4(u-c)$$

$$\Rightarrow u(t) = (t+c_2)^2 + c_1$$



$$x(t) = \sqrt{(t+1)(t-1/2)} \rightsquigarrow$$ درباره $(-1,1)$ خوش تعریف نیست و معادله اویلر-لاگرانژ جواب ایستا ندارد.

هرچند تابعی که در نمودار بالا تعریف شده مینیمم J را می‌دهد.

تعریف- هم پیوسته $\hat{x}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ را قطعه‌قطعه هموار گوییم هرگاه به غیر از نقاط $c_0<c_1<\dots<c_k$

در بقیه نقاط دارای مشتق پیوسته باشد و $\frac{d}{dt}\hat{x}$ در این نقاط دارای حد چپ و راست باشد.

فضای همه توابع قطعه‌قطعه هموار را با $\hat{C}^1[a,b]$ نشان می‌دهیم.

واضح است که فضای $C^1[a,b]$ در $\hat{C}^1[a,b]$ چگال است (با نرم سوپریمم)

قضیه- اگر $x^*\in C^1[a,b]$ جواب مسأله زیر باشد

$$\min_{x\in D} J(x)$$

که $D=\{x\in C^1[a,b]: x(a)=x_0,\ x(b)=x_1\}$. آنگاه x^* جواب مسأله

$$\min_{x\in\hat{D}} J(x)$$

نیز هست که $\hat{D}=\{x\in\hat{C}^1[a,b]: x(a)=x_0,\ x(b)=x_1\}$

شرط لازم برای جواب

$$J(\hat{x}^*) = \min_{x \in \hat{D}} J(x)$$

$$J(x) = \int_a^b l(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

اگر $\xi \in \hat{C}^1[a,b]$ که $\xi(a)=\xi(b)=0$ ، آنگاه

$$J(x^* + \theta\xi) \geq J(x^*) \rightsquigarrow \frac{d}{d\theta} J(x^* + \theta\xi)\Big|_{\theta=0} = 0$$

به شرط آنکه نسبت به θ مشتق پذیر باشد.

$$\frac{d}{d\theta}\int_a^b l(t, x^* + \theta\xi, \dot{x}^* + \theta\dot{\xi})\, dt = \int_a^b \nabla_x l \cdot \xi + \nabla_p l \cdot \dot{\xi}\ dt$$

$$= \sum_{c_i} \left[\int_{c_i}^{c_{i+1}} \left(\nabla_x l - \frac{d}{dt}\nabla_p l\right)\xi\, dt + \nabla_p l \cdot \xi \Big|_{t=c_i^+}^{t=c_{i+1}^-} \right]$$

نقاط ناپیوستگی c_i ، $\dot{x}^*$

برای سادگی فرض کنیم $\xi \in C^1$. $c_0 = a$, $c_N = b$.

$$= \int_a^b \left(\nabla_x l - \frac{d}{dt}\nabla_p l\right)\xi \, dt + \sum_{c_i} \left(\nabla_p l(c_i^-) - \nabla_p l(c_i^+)\right)\xi(c_i)$$

<u>شرط لازم</u>: اگر $\hat{C}^1 \ni x^*$ جواب باشه، علاوه بر معادله اویلر-لاگرانژ در نقاط گوشه‌ای x^*

روابط زیر برقرار است:

شرط اول گوشه‌ای وایرشتراس-اردمن $\leftarrow$ $\nabla_p l(c, x^*(c), \dot{x}^*(c^-)) = \nabla_p l(c, x^*(c), \dot{x}^*(c^+))$

اگر اجازه بدهیم ξ نیز قطعه‌قطعه هموار باشه، آنگاه نقاط گوشه‌ای $x^*+\theta\xi$ به جای آنکه نقاط

ثابت C_i باشه، وابسته به θ این نقطه گوشه‌ای تغییر می‌کند.

$$\frac{d}{d\theta} J(x^*+\theta\xi) = \sum_{c_i} \frac{d}{d\theta}\int_{c_i(\theta)}^{c_{i+1}(\theta)} l \, dt = \sum_{c_i} \int_{c_i}^{c_{i+1}} \frac{d}{d\theta} l + \frac{d}{d\theta} c_{i+1} \cdot l\Big|_{c_{i+1}^-} - \frac{d}{d\theta} c_i \cdot l\Big|_{c_i^+}$$

$$\frac{d}{d\theta} c_i \left(l\Big|_{t=c_i^+} - l\Big|_{t=c_i^-} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad l - \dot{x}^* \cdot \nabla_p l \Big|_{t=c_i^+} = l - \dot{x}^* \cdot \nabla_p l \Big|_{t=c_i^-}$$

نکته- شرط اول گوشه‌ای بیان می‌کند که $\nabla_p l$ تابعی پیوسته است.

شرط دوم گوشه‌ای نشان می‌دهد که تابع $l - \dot{x} \cdot \nabla_p l$ تابعی پیوسته است.

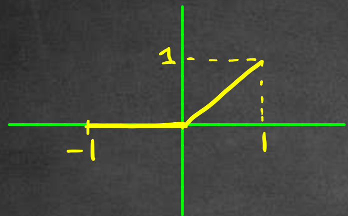
اگر در مسأله حساب تغییرات تابع لاگرانژین l به زمان وابسته نباشد، $l(x,p)$ آنگاه از معادله اویلر لاگرانژ

نتیجه می‌شود $H = l - \dot{x} \nabla_p l$ مقدار ثابتی دارد.

$$0 \stackrel{?}{=} \frac{d}{dt} H = \nabla_x l \cdot \dot{x} + \cancel{\nabla_p l \cdot \ddot{x}} - \cancel{\ddot{x} \cdot \nabla_p} l - \dot{x} \frac{d}{dt}(\nabla_p l) = 0$$

بنابر شرط دوم گوشه‌ای وقتی جواب مسأله بهینه‌سازی قطعه‌قطعه هموار است تابع همیلتونی $H = l - \dot{x}\cdot\nabla_p l$

نیز مقدار ثابتی دارد (در حالتی که l به t وابسته نیست)



مثال- $$J(x) = \int_{-1}^{1} x^2(1-\dot{x})^2\,dt$$

$$x^2(1-\dot{x}^2) = C$$

اگر $\dot{x}$ در نقطه $t=\alpha$ ناپیوسته باشد.

شرط اول $\Rightarrow$ پیوسته است $\nabla_p l = 2x^2(\dot{x}-1)$

$$x^2(\alpha)\,(\dot{x}(\alpha^+)-1) = x(\alpha)^2\,(\dot{x}(\alpha^-)-1)$$

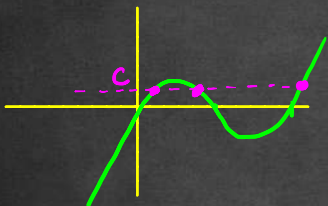
اگر $x(\alpha)\neq 0$ آنگاه $\dot{x}$ نیز در $t=\alpha$ پیوسته است. بنابراین نقاط گوشه‌ای در حالت $x(\alpha)=0$ وجود دارند.

شرط دوم $\Rightarrow$ پیوسته است $l - \dot{x}\cdot\nabla_p l = x^2(1-\dot{x})^2 - 2x^2\dot{x}(\dot{x}-1) = x^2(1-\dot{x}^2)$

مثال – $J(x)=\int_0^2 \dot{x}^2(1-\dot{x})^2\,dt$ ، $x(0)=0\,,\ x(2)=1$

معادله اویلر – لاگرانژ $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(2\dot{x}(1-\dot{x})^2+2\dot{x}^2(\dot{x}-1)\right)=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(\dot{x}-1)(2\dot{x}-1)\right)=0$$

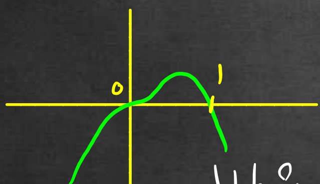


$$\Rightarrow \dot{x}(\dot{x}-1)(2\dot{x}-1)=C$$

اگر قرار باشد x هموار باشد باید $\dot{x}$ مقدار ثابت داشته باشد.

$$x(t)=at+b \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} x(t)=t/2 \to J(x)=\frac{1}{8}$$

اگر قرار باشد، x نقطه گوشه‌ای داشته باشد باید



شرط اول $\Rightarrow$ پیوسته است $\nabla_p l=\dot{x}(\dot{x}-1)(2\dot{x}-1)$

شرط دوم $\Rightarrow l-\dot{x}\cdot\nabla_p l=\dot{x}^2(1-\dot{x})^2-\dot{x}^2(\dot{x}-1)(2\dot{x}-1)=\dot{x}^3(1-\dot{x})$

تنها حالت ممکن این است که $\dot{x} \in \{0, 1\}$